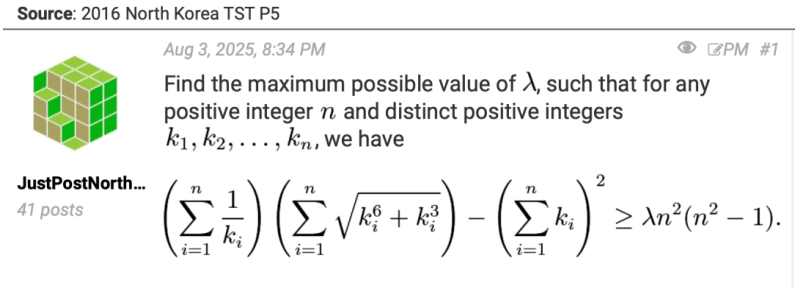
一道来自朝鲜的离散不等式问题

2025-08-20　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_04d8e5872580faff

之前讲过很多次这道题，今天看 AoPS 才发现这是 2016 年朝鲜的国家队选拔考试题。



题目：

求最大的实数 λ，使得对任意正整数 n，和任意互不相同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，均有 $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^6 + a_k^3}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \geq \lambda n^2(n^2-1)$.

解答（PDF 中已展开）

分析与解答：

在 $n \to +\infty$ 时，$\sqrt{a_k^6 + a_k^3}$ 中的 a_k^3 可以忽略不计．于是

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^6 + a_k^3}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \\ \geq &\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^3\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2\end{aligned}$$

这里用 Cauchy 不等式可得 ≥ 0，但无法取得等号（a_k 为不同正整数），于是考虑使用 Lagrange 恒等式，并进行化简：

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^3\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \\ =&\sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\sqrt{\frac{a_j^3}{a_i}} - \sqrt{\frac{a_i^3}{a_j}}\right)^2 \\ =&\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{(a_i^2 - a_j^2)^2}{a_i a_j} \\ =&\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{(a_i + a_j)^2}{a_i a_j} \cdot (a_i - a_j)^2 \\ >&\sum_{1\leq i<j\leq n} 4(a_i - a_j)^2\end{aligned}$$

（**注：**以上放缩看似无法取等，但在 $n \to +\infty$ 时是能够接近取等的.）

不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，由整数的离散性知：

$a_j - a_i \geq j - i$

于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq i<j\leq n} 4(a_i - a_j)^2 \\
\geq &4\sum_{1\leq i<j\leq n} (j-i)^2 \\
= &4\left(n\sum_{k=1}^{n} k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\right) \\
= &\frac{1}{3}n^2(n^2-1)
\end{aligned}$$

于是 $\lambda = \dfrac{1}{3}$ 时，不等式成立.

下证：$\lambda \leq \dfrac{1}{3}$，只需根据以上放缩过程，取一组 a_k，将不等式左边放大成常数.

取 $a_i = i + X$（X 为待定的自然数），注意到

$a_k^6 + a_k^3 \leq \left(a_k^3 + \frac{1}{2}\right)^2$

于是

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^6+a_k^3}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \\
\leq &\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^3+\frac{1}{2}\right)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \\
= &\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(4+\frac{(a_i-a_j)^2}{a_i a_j}\right)\cdot(a_i-a_j)^2 + \frac{n}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \\
= &4\sum_{1\leq i<j\leq n}(i-j)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{(i-j)^2}{a_i a_j} + \frac{n}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}
\end{aligned}$$

令 $X \to +\infty$，可得

$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{(i-j)^2}{a_i a_j} + \frac{n}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \to 0$

于是

$\lambda n^2(n^2-1) \leq 4\sum_{1\leq i<j\leq n}(i-j)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{3}$

即 $\lambda \leq \dfrac{1}{3}$，证毕.