是否存在满足要求的二元运算？

2023-10-07　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_04e847823019dfdd

题目：

给定实数 $a \neq b$，集合 X 中至少含有 a, b 两个元素．函数 $f: X^3 \to X$ 定义如下：

$$f(x,y,z) = \begin{cases} a, 若x,y,z不为a \\ b, 若x,y,z中至少一数为a \end{cases}$$

是否存在二元运算 $*: X^2 \to X$，使得对任意 $x, y, z \in X$，都有 $f(x,y,z) = (x * y) * z$?

解答（PDF 中已展开）

答案：

不存在.

证明：

假设存在这样的二元运算，分两种情况进行讨论：

(1) 若对任意 $x, y \in X, x \neq a, y \neq a$，都有 $x * y \neq a$.

则对任意 $x, y, z \in X, x \neq a, y \neq a, z \neq a$，于是 $x * y \neq a$，我们有

$$a = f(x,y,z) = (x * y) * z \neq a$$

矛盾.

(2) 若存在 $u, v \in X, u \neq a, v \neq a$，使得 $u * v = a$．则

$$a * a = (u * v) * a = f(u,v,a) = b$$

于是对任意 $x \in X$，有

$$b * x = (a * a) * x = f(a,a,x) = b$$

因此

$$a = f(b,u,v) = (b * u) * v = b * v = b$$

这与 $a \neq b$ 矛盾.

综上，不存在这样的二元运算.