2023 年伊比利亚美洲大学数学竞赛

2023-10-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0503e6d43d5f0c7f

之前还翻译了2023 年伊比利亚美洲数学奥林匹克——中文翻译

2023 年伊比利亚美洲大学数学竞赛
（第一天）

程国根 译

1. 求所有的正实数对 (a,b)，其中 $a<b$，满足：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b \{x\}^k dx = \int_a^b \{x\}dx+\int_a^b \{x\}^2 dx+\int_a^b \{x\}^3 dx+\cdots$$

收敛，并将极限值用 a 和 b 表示.

注： $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ 为 x 的小数部分.

2. 玩具制造商有 k 枚骰子，每枚骰子都有 6 个空白面. 玩具制造商必须在每个骰子的每个面上写上 $0,1,\cdots,9$ 中的一个数字. 求最大的整数 n（用 k 表示），使得对于任意正整数 $r\le n$，玩具制造商都可以选择一些骰子并用它们组成 r 的十进制表示.

注： 数字 6 和 9 是可以区分的：它们显示为 $\underline{6}$ 和 $\underline{9}$.

3. 给定一个 3×3 实对称矩阵 A，定义 $f(A)$ 为一个与 A 有相同特征向量的 3×3 矩阵，且若 A 的特征值依次为 a、b、c，则 $f(A)$ 的特征值依次为 $b+c$、$c+a$、$a+b$. 定义 3×3 的对称矩阵列 $A_0,A_1,A_2,\cdots$，满足 $A_{n+1}=f(A_n)$，$n\ge 0$. 若矩阵 A_0 没有 0，求最大的 $j\ge 0$，使得矩阵 A_j 中有 0.

1

2023 年伊比利亚美洲大学数学竞赛（第二天）

程国根　译

4. 对正整数 n，用 $\sigma(n)$ 表示 n 的全体正约数之和. 计算:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n^{2023})}{(\sigma(n))^{2023}}.$$

5. 给定正整数 $k>1$，求所有正整数 n，使得多项式

$$P(z)=z^n+\sum_{j=0}^{2^k-2}z^j=1+z+z^2+\cdots+z^{2^k-2}+z^n$$

有一个复根 w，满足 $|w|=1$.

6. 设 n 为正整数. 定义 $f(n)$ 为满足如下要求的有穷数列 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 的个数:

- $a_1<a_2<\cdots<a_k$;
- $a_1+a_2^2+\cdots+a_k^k\le n$.

求正常数 α 和 C，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^\alpha}=C.$$

2

2023 年伊比利亚美洲大学数学竞赛（第一天）

程国根　译

1. 求所有的正实数对 (a,b)，其中 $a<b$，满足：$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b\{x\}^k dx =\int_a^b\{x\} dx + \int_a^b\{x\}^2 dx + \int_a^b\{x\}^3 dx + \cdots$$ 收敛，并将极限值用 a和 b表示. **注：**$\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$为 x的小数部分.

2. 玩具制造商有 k枚骰子，每枚骰子都有 6个空白面. 玩具制造商必须在每个骰子的每个面上写上 $0,1,\cdots,9$中的一个数字. 求最大的整数 n（用 k表示），使得对于任意正整数 $r\leq n$，玩具制造商都可以选择一些骰子并用它们组成 r的十进制表示. **注：**数字 6和 9是可以区分的：它们显示为 $\underline{6}$和 $\underline{9}$.

3. 给定一个 3×3实对称矩阵 A，定义 $f(A)$为一个与 A有相同特征向量的 3×3矩阵，且若 A的特征值依次为 a、b、c，则 $f(A)$的特征值依次为 $b+c$、$c+a$、$a+b$. 定义 3×3的对称矩阵列 $A_{0}, A_{1}, A_{2},\cdots$，满足 $A_{n+1}=f(A_{n})$，$n\ge 0$. 若矩阵 A_{0}没有 0，求最大的 $j\ge 0$，使得矩阵 A_{j}中有

0.

2023 年伊比利亚美洲大学数学竞赛（第二天）

程国根　译

4.　对正整数 n，用 $\sigma(n)$表示 n的全体正约数之和. 计算：$$\limsup\limits_{n\rightarrow \infty} \frac{\sigma(n^{2023})}{(\sigma(n))^{2023}}.$$

5. 给定正整数 $k>1$，求所有正整数 n，使得多项式 $$P(z) = z^n + \sum_{j=0}^{2^k-2} z^j = 1 +z +z^2 + \cdots +z^{2^k-2} + z^n$$有一个复根 w，满足 $| w|=1$.

6. 设 n为正整数. 定义 $f(n)$为满足如下要求的有穷数列 $(a_{1},a_{2},\cdots,a_{k})$的个数：

- $a_{1}<a_{2}<\cdots<a_{k}$；
- $a_{1}+a_{2}^{2}+\cdots+a_{k}^{k}\le n$.

求正常数 α和 C，使得 $$\lim\limits_{n\rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^\alpha}= C.$$

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年伊比利亚美洲大学数学竞赛（第一天）}\flushright 程国根\quad 译\ex 求所有的正实数对$(a,b)$，其中$a<b$，
↪ 满足：$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b\{x\}^k dx =\int_a^b\{x\} dx + \int_a^b\{x\}^2 dx + \int_a^b\{x\}^3 dx + \cdots$$
收敛，并将极限值用 $a$ 和 $b$ 表示.
\textbf{注：}$\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$为$x$的小数部分. \vfill\ex 玩具制造商有$k$枚骰子，每枚骰子都有$6$个空白面.
↪ 玩具制造商必须在每个骰子的每个面上写上$0,1,\cdots,9$中的一个数字. 求最大的整数$n$（用$k$表示），
↪ 使得对于任意正整数$r\leq n$，玩具制造商都可以选择一些骰子并用它们组成$r$的十进制表示.
\textbf{注：}数字$6$和$9$是可以区分的：它们显示为$\underline{6}$和$\underline{9}$. \vfill\ex 给定一个$3\times
↪ 3$实对称矩阵$A$，定义$f(A)$为一个与$A$有相同特征向量的$3\times 3$矩阵，且若$A$的特征值依次为$a$、$b$、$c$，
↪ 则$f(A)$的特征值依次为$b+c$、$c+a$、$a+b$. 定义$3\times 3$的对称矩阵列$A_{0}, A_{1}, A_{2},\cdots$，
↪ 满足$A_{n+1}=f(A_{n})$，$n\ge 0$. 若矩阵$A_{0}$没有$0$，求最大的$j\ge 0$，使得矩阵$A_{j}$中有$0$.
↪ \vfill\newpage\section*{2023年伊比利亚美洲大学数学竞赛（第二天）}\flushright 程国根\quad 译\ex 对正整数$n$，
↪ 用$\sigma(n)$表示$n$的全体正约数之和. 计算：$$\limsup\limits_{n\rightarrow \infty}
↪ \frac{\sigma(n^{2023})}{(\sigma(n))^{2023}}.$$\vfill\ex 给定正整数$k>1$，求所有正整数$n$，使得多项式$$P(z) = z^n +
↪ \sum_{j=0}^{2^k-2} z^j = 1 +z +z^2 + \cdots +z^{2^k-2} + z^n$$有一个复根$w$，满足$|w|=1$. \vfill\ex 设$n$为正整数.
↪ 定义$f(n)$为满足如下要求的有穷数列$(a_{1},a_{2},\cdots,a_{k})$的个数：\begin{itemize}\item $a_{1}<a_{2}<\cdots<a_{k}$；
↪ \item $a_{1}+a_{2}^{2}+\cdots+a_{k}^{k}\le n$. \end{itemize}求正常数$\alpha$和$C$，使得$$\lim\limits_{n\rightarrow \infty}
↪ \frac{f(n)}{n^\alpha}=C.$$\vfill
```