# 2026 年塔什干国际数学奥林匹克

2026-05-21 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_05a4060fba2985e6

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

## 2026 年塔什干国际数学奥林匹克

### 第一天

**1.** 在一个无限方格网格上，一辆汽车占据一个单位方格，朝向为东、南、西或北．两名玩家轮流进行以下操作：

- 玩家 1 将汽车沿当前朝向向前移动至少 1 格、至多 10 格．
- 玩家 2 将汽车原地左转 $90^\circ$ 或右转 $90^\circ$．

玩家 1 先手．如果在前 1000 次玩家 1 的移动中，汽车访问了某个方格两次，则玩家 2 获胜．否则玩家 1 获胜．确定哪位玩家有必胜策略．

注：玩家 2 旋转汽车或驾车穿过方格都不算作新的访问．特别地，玩家 1 的每次移动恰好使一个方格的访问次数增加 1．

**2.** 给定锐角三角形 $ABC$，满足 $AB < AC$．设 $I$ 为其内心，$D$ 为 $I$ 在 $BC$ 上的投影．直线 $AI$ 交 $BC$ 于 $E$．设 $S$ 为弧 $BAC$ 的中点．设 $F \neq D$ 为线段 $CE$ 上的点，满足 $A, D, S, F$ 四点共圆．设 $P$ 为直线 $AF$ 与 $SE$ 的交点．证明：$\angle PIA = \angle FDA$．

**3.** 设 $p, q$ 为两个不同的奇素数．证明：存在无穷多个正整数 $n$，使得

$$\gcd\left(\binom{2n}{n}, pq\right) = 1$$

## 第二天

**4.** 一家银行发行面额为 $a$ 和 $b$ 的硬币，其中 $a > b > 1$ 且为互素整数．银行关注这样一种情况：某人拥有一组硬币，总价值为 $n$，但无法恰好支付金额 $k$．对于给定的自然数 $k < n$，如果存在一组总价值为 $n$ 的硬币，使得它的任何子集的总价值都不等于 $k$，则称 $k$ 是 $n$-坏的．特别地，如果不存在总价值为 $n$ 的硬币组合，则没有 $k < n$ 是 $n$-坏的．

对于每个 $n$，设 $f(n)$ 为小于 $n$ 的 $n$-坏自然数的个数．证明在序列 $f(1), f(2), f(3), \ldots$ 中，恰好存在一个正整数出现无穷多次．

**5.** 求所有非零实系数多项式 $P(x)$，满足存在自然数 $N$，使得对任意自然数 $n \geq N$，存在实系数多项式 $Q_n(x)$，满足

$$\frac{1}{P(x)} + \frac{1}{P(x+1)} + \cdots + \frac{1}{P(x+n-1)} = \frac{1}{Q_n(x)}$$

**6.** 10 个孩子每人都有自己最喜欢的糖果类型，且所有孩子的类型互不相同．他们的祖母从商店订购了一定数量的糖果，每种类型的糖果数量可以是任意非负整数，共 10 种类型．然后，店主将所有订购的糖果放入 10 个透明袋子中，以任意方式将单个糖果分配到各个袋子里．看到袋子里的内容后，祖母给每个孩子恰好一个袋子．

之后，每个孩子会因为收到的袋子里每有一颗自己最喜欢类型的糖果，就给祖母一个幸福点（其他类型的糖果不给幸福点）．

对于自然数 $m$，求最小的自然数 $g = g(m)$，满足以下性质：祖母总共订购 $g$ 颗糖果时，无论店主如何将它们分配到 10 个袋子中，祖母总能以某种方式将袋子分配给孩子们，确保至少获得 $m$ 个幸福点．