2026 年蒙古数学奥林匹克

2026-04-02　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_05bbd27fd66aae78

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

恩次方根
ENCIFANGGEN

2026 年蒙古数学奥林匹克

第一天

1. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：a_1, a_2 为给定正整数，对任意 $n \geq 2$，$a_{n+1} = \frac{a_2}{a_1} a_n - a_{n-1}$．若对任意正整数 n，a_n 均为正整数，求证：$\frac{a_2}{a_1}$ 为整数．

2. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω，I 为其内心．点 E、F 分别在边 AC、AB 上，满足 E, I, F 三点共线，且 $EF \perp AI$．直线 BI、CI 分别与 ω 再次交于点 M_B、M_C．$\triangle BFM_B$、$\triangle CEM_C$ 的外接圆分别与直线 BC 再次交于点 X、Y．求证：$BX = CY$．

3. 一个国家由 62 座岛屿组成．若干对岛屿之间由桥梁相连；若两座岛屿由桥梁相连，则称这两座岛屿是相邻的．假设：

- 每座岛屿至少与另外 3 座岛屿相邻．
- 对于任意两座相邻的岛屿，存在一座岛屿与它们都相邻．
- 不存在 4 座岛屿，使得其中每一对岛屿都相邻．

求桥梁数量的最小可能值．

1

恩次方根
ENCIFANGGEN

第二天

4. 设 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为实数．定义数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $x_1 = 0, y_1 = 1$，且对所有正整数 n，

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 y_n + a_3 \\ y_{n+1} = b_1 x_n + b_2 y_n + b_3 \end{cases}$$

若对所有正整数 n，都有 $y_n = x_n^3 + 1$．证明：数列 $\{x_n\}$ 仅取有限个不同的值．

5. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω．点 E、F 分别在边 AC、AB 上，满足四边形 $BCEF$ 内接于圆．设 D 为线段 EF 上一点．直线 BD、CD 分别与 ω 再次交于点 K、L．假设 $\triangle BFK$ 与 $\triangle CEL$ 的外接圆交于两个不同的点 X、Y．证明：线段 XY 的中点在 ω 上．

6. 函数 $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ 满足：对任意 $m, n \in \mathbb{N}_+$，都有

$$f(f(n)f(n+m)) = f(f(n)f(m)) + f(f(n))^2.$$

求在前 2026 个素数中，满足 $f(p) < p$ 的素数 p 的最大可能个数．