Mason-Stothers 定理解一道中科大强基试题

2021-07-02 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_06ce7c3b2a062ce1

2021 年中国科技大学的最后一题如下：

题目 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 为实系数多项式，且两两互素．若

$$(f(x))^n+(g(x))^n=(h(x))^n,$$

求证：$n=1$ 或 2.

这可以看成是费马大定理在多项式中的情况.

我们可以用 Mason-Stothers 定理来解决这道题．(摘自《高等代数》郭学军)

对任意的多项式 F，我们用 $n_0(F)$ 表示 F 的互不相同的根的个数，即如果有重根的话，则不考虑其重数，都只记一次.

Mason-Stothers 定理假设 f，g，h 是 3 个互素的多项式，而且 $f+g=h$．那么

$$\max\left(\deg(f),\deg(g),\deg(h)\right)\leq n_0(fgh)-1$$

解答（PDF 中已展开）

证明令 $F=\dfrac{f}{h}$，$G=\dfrac{g}{h}$，则 $F+G=1$．两边求导可得 $F'+G'=0$．所以

$$\frac{F'}{F}F+\frac{G'}{G}G=0,$$

即

$$\frac{g}{h}=\frac{G}{F}=-\frac{F'/F}{G'/G}.$$

假设

$$f(x)=c_1\prod(x-\alpha_i)^{a_i},$$
$$g(x)=c_2\prod(x-\beta_j)^{b_j},$$
$$h(x)=c_3\prod(x-\gamma_k)^{c_k},$$

则

$$\frac{g}{f}=-\frac{F'/F}{G'/G}=-\frac{\sum\frac{a_i}{x-\alpha_i}-\prod\frac{c_k}{x-\gamma_k}}{\sum\frac{b_j}{x-\beta_j}-\prod\frac{c_k}{x-\gamma_k}}.$$

记

$$p(x)=\prod(x-\alpha_i)\prod(x-\beta_j)\prod(x-\gamma_k),$$

则 $n_0(fgh)=n_0(p)$，且 $F_1=p\frac{F'}{F}$ 和 $G_1=p\frac{G'}{G}$ 均为多项式.

又因为 $\frac{g}{f}=-\frac{F_1}{G_1}$，所以 f，g 的次数均不大于 $n_0(p)-1$. 所以

$$\max\left(\deg(f),\deg(g),\deg(h)\right)\leq n_0(fgh)-1.$$

回到原题，对 f^n，g^n，h^n 使用 Mason-Stothers 定理，注意到

$$n_0(f^ng^nh^n)=n_0(fgh)\leq\deg f+\deg g+\deg h$$

有

$$\begin{aligned}&\deg f+\deg g+\deg h-1\\ \geq&\max(n\deg f,n\deg g,n\deg h)\\ \geq&\frac{1}{3}\left(n\deg f+n\deg g+n\deg h\right)\end{aligned}$$

即

$$\left(1-\frac{n}{3}\right)\left(\deg f+\deg g+\deg h\right)\geq 1$$

由此得到 $n<3$.

$n=1$ 时是平凡的；

$n=2$ 时，注意到

$$(x^2-1)^2+(2x)^2=(x^2+1)^2.$$

证毕.

注：更一般地，方程 $f^a+g^b=h^c$ 有两两互素地多项式解，但且仅当 (a,b,c) 满足下面某个形式：

$$(1,m,n),m,n\geq 1;$$

$$(2,2,n),n\geq 2;$$

$(2,3,3)$;

$(2,3,4)$;

$(2,3,5)$.