从一个集合问题的构造到有限射影平面

2021-04-23 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_07537f8856b29f60

在从女儿的桌游想到的两道集合问题一文中，有这样一个问题：

题目 1 有 54 个 8 元集合，其中任意两个集合的交集恰有一个元素，则这些集合的并集至少有几个元素？

事实上，本题可以推广到一般情况：

题目 2 p 为素数时，试构造 p^2+p+1 个集合，共含有 p^2+p+1 个不同的元素，每个集合含有 $p+1$ 个元素，且两两交集元素个数为 1.

首先尝试把题目中的各个概念具体化，由“两两交集元素个数为 1”这一条件想到“两条不同直线至多有一个交点”，于是变为如下问题：

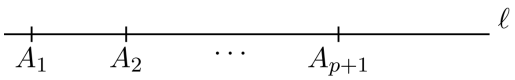
题目 3 p 为素数，试在平面上作 p^2+p+1 条直线，任意两条直线均不平行，产生 p^2+p+1 个不同的交点，满足一条直线经过 $p+1$ 个上述交点.

接下来尝试进行构造.

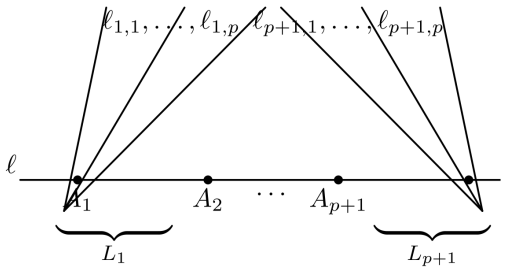
容易知道，这些直线两两不平行，但交点个数远远少于 $\binom{p^2+p+1}{2}$，于是必存在多个多线共点的情况. 我们对这些直线进行分组，首先考虑平均分组，容易知道平均每个交点在 $p+1$ 条直线上.

先考虑其中一条直线 l，l 上有 $p+1$ 个交点：

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{p+1}$$



每个交点 A_i 还被另外 p 条直线（记它们组成的集合为 L_i）穿过.



对于 L_{p+1} 中的任意一条直线 $l_{p+1,m}$，其上除了 A_{p+1} 外还有 p 个交点，即为其与 L_1，L_2，$\cdots$，L_p 中的 p^2 条直线产生的所有交点.

注意到 L_j 中两条不同直线必交于 A_j，故不会交于其它点. 因此 $l_{p+1,m}$ 上的每个交点恰好被 L_1，

L_2，$\cdots$，L_p 这 p 组直线中每组一条穿过.

至此，我们已经大概了解了这些点和线的结合方式，按照上述方法也能直接给出 p 较小时的构造. 但是一般情形的构造还是比较困难. 下面我们借助射影平面来进行构造.

先给出射影平面的定义：

射影平面由一组线、一组点，以及一个点与线之间的结合关系所组成，并具有以下性质：

1. 给定任意两个不同的点，恰有一条线会结合这两个点.
2. 给定任意两条不同的线，恰有一个点会结合这两条线.
3. 存在四个点，使得没有线可以结合两个以上的这些点.

射影平面在欧氏平面的每一组平行线上附加上了一个新的点. 该点可被视为结合该组的每条线. 不同组平行线会得到不同的点，这些点被称为无穷远点. 并且增加了一条线，让该线视为结合所有（且只有）无穷远点，该线被称为无穷远线.

考虑在射影平面进行构造，令 l 为无穷远线，则 A_1，A_2，$\cdots$，A_{p+1} 为无穷远点，后面的构造方式同上. 于是该构造在欧氏平面上的描述如下：

取 p^2 个点 $\{(x,y)|1 \le x,y \le p, x,y \in \mathbb{Z}\}$，过每一点作 $p+1$ 条斜率分别为 0，1，$\cdots$，∞ 的直线，则会产生 $p+1$ 组平行线，其交于 l 上的 $p+1$ 个不同点：A_1，A_2，$\cdots$，A_{p+1}. 其余不平行的直线每 p 条线交于一点 (这里认为 $(2,1)$，$(3,2)$，$\cdots$，$(p,p-1)$，$(1,p)$ 这 p 个点是共线的，可以理解为 $(p,p-1)$ 与 $(1,p)$ 之间有一个无穷远点)，构造完毕.

事实上，可证明一个射影平面会有相同数量的点与线（有限或无限）. 因此，对每个有限射影平面而言，总存在一个整数 $N \ge 2$，使得该平面有 N^2+N+1 个点，N^2+N+1 条线，每条线上有 $N+1$ 个点，且每个点会有 $N+1$ 条线. 该整数 N 即称为该射影平面的阶.

可以证明，存在一个为 $N=p^n$ 阶的射影平面，其中 p 为素数，n 为正整数. 实际上，所有已知的有限射影平面，其阶均为 p^n 的形式.

是否存在其它阶的有限射影平面仍是个未解的问题. 唯一一个已知在阶上的限制为 Bruck–Ryser–Chowla 定理：若阶 N 模 4 余数为 1 或 2，则必为两个完全平方数之和. 由此排除了 $N=6$. 下一个 $N=10$ 的例子也已透过大量的电脑运算排除. 剩下的数目前还没有证明或证伪，包括下一个 $N=12$ 的情形.

这也是题目中要求 p 为素数的原因.