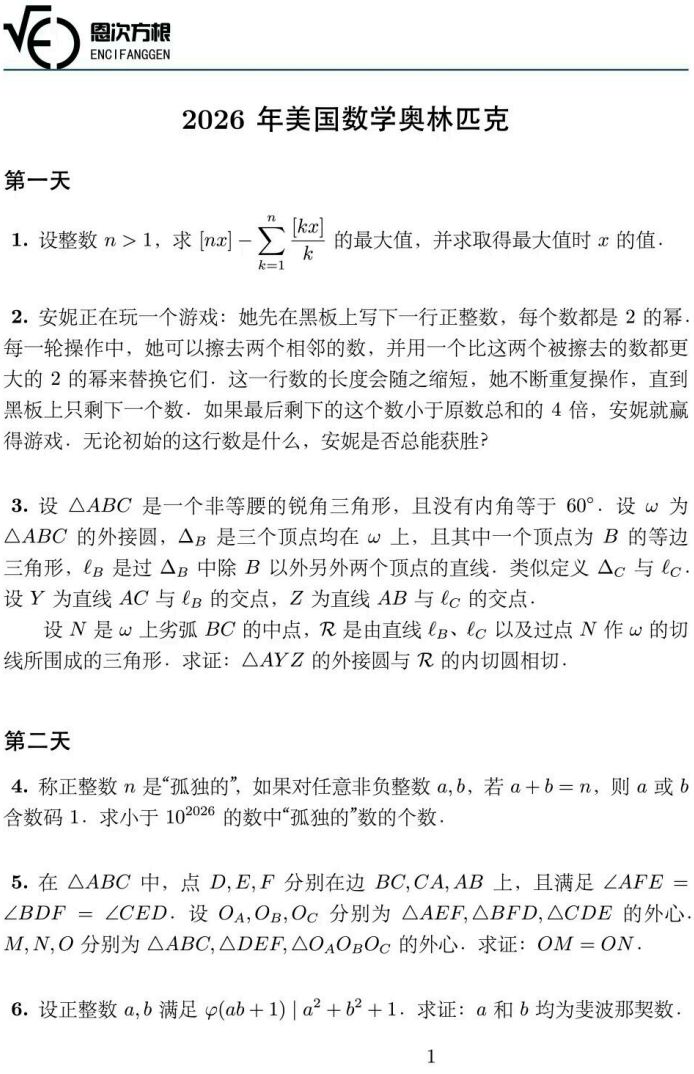
# 2026 年美国数学奥林匹克

2026-03-23　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_07ba8af831f343a1

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方附本站人工转写的文字版，只作阅读与检索之用，若与原图有出入，以公众号原文为准。



恩次方根
ENCIFANGGEN

**2026 年美国数学奥林匹克**

**第一天**

**1.** 设整数 $n>1$，求 $[nx]-\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}$ 的最大值，并求取得最大值时 $x$ 的值.

**2.** 安妮正在玩一个游戏：她先在黑板上写下一行正整数，每个数都是 2 的幂. 每一轮操作中，她可以擦去两个相邻的数，并用一个比这两个被擦去的数都更大的 2 的幂来替换它们. 这一行数的长度会随之缩短，她不断重复操作，直到黑板上只剩下一个数. 如果最后剩下的这个数小于原数总和的 4 倍，安妮就赢得游戏. 无论初始的这行数是什么，安妮是否总能获胜?

**3.** 设 $\triangle ABC$ 是一个非等腰的锐角三角形，且没有内角等于 $60^\circ$. 设 $\omega$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，$\Delta_B$ 是三个顶点均在 $\omega$ 上，且其中一个顶点为 $B$ 的等边三角形，$\ell_B$ 是过 $\Delta_B$ 中除 $B$ 以外另外两个顶点的直线. 类似定义 $\Delta_C$ 与 $\ell_C$. 设 $Y$ 为直线 $AC$ 与 $\ell_B$ 的交点，$Z$ 为直线 $AB$ 与 $\ell_C$ 的交点.

设 $N$ 是 $\omega$ 上劣弧 $BC$ 的中点，$\mathcal{R}$ 是由直线 $\ell_B$、$\ell_C$ 以及过点 $N$ 作 $\omega$ 的切线所围成的三角形. 求证：$\triangle AYZ$ 的外接圆与 $\mathcal{R}$ 的内切圆相切.

**第二天**

**4.** 称正整数 $n$ 是“孤独的”，如果对任意非负整数 $a,b$，若 $a+b=n$，则 $a$ 或 $b$ 含数码 1. 求小于 $10^{2026}$ 的数中“孤独的”数的个数.

**5.** 在 $\triangle ABC$ 中，点 $D,E,F$ 分别在边 $BC,CA,AB$ 上，且满足 $\angle AFE=\angle BDF=\angle CED$. 设 $O_A,O_B,O_C$ 分别为 $\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 的外心. $M,N,O$ 分别为 $\triangle ABC,\triangle DEF,\triangle O_AO_BO_C$ 的外心. 求证：$OM=ON$.

**6.** 设正整数 $a,b$ 满足 $\varphi(ab+1)\mid a^2+b^2+1$. 求证：$a$ 和 $b$ 均为斐波那契数.

1

## 本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 第一天第 1 题　设整数 $n>1$，求 $[nx]-\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}$ 的最大值，并求取得最大值时 $x$ 的值。
2. 第一天第 2 题　安妮正在玩一个游戏：她先在黑板上写下一行正整数，每个数都是 2 的幂。每一轮操作中，她可以擦去两个相邻的数，并用一个比这两个被擦去的数都更大的 2

的幂来替换它们。这一行数的长度会随之缩短，她不断重复操作，直到黑板上只剩下一个数。如果最后剩下的这个数小于原数总和的 4 倍，安妮就赢得游戏。无论初始的这行数是什么，安妮是否总能获胜?

3. 第一天第 3 题　设 $\triangle ABC$ 是一个非等腰的锐角三角形，且没有内角等于 $60^\circ$。设 $\omega$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，$\Delta_B$ 是三个顶点均在 $\omega$ 上、且其中一个顶点为 $B$ 的等边三角形，$\ell_B$ 是过 $\Delta_B$ 中除 $B$ 以外另外两个顶点的直线。类似定义 $\Delta_C$ 与 $\ell_C$。设 $Y$ 为直线 $AC$ 与 $\ell_B$ 的交点，$Z$ 为直线 $AB$ 与 $\ell_C$ 的交点。设 $N$ 是 $\omega$ 上劣弧 $BC$ 的中点，$\mathcal{R}$ 是由直线 $\ell_B$、$\ell_C$ 以及过点 $N$ 作 $\omega$ 的切线所围成的三角形。求证：$\triangle AYZ$ 的外接圆与 $\mathcal{R}$ 的内切圆相切。
4. 第二天第 4 题　称正整数 $n$ 是“孤独的”，如果对任意非负整数 $a,b$，若 $a+b=n$，则 $a$ 或 $b$ 含数码 1。求小于 $10^{2026}$ 的数中“孤独的”数的个数。
5. 第二天第 5 题　在 $\triangle ABC$ 中，点 $D,E,F$ 分别在边 $BC,CA,AB$ 上，且满足 $\angle AFE=\angle BDF=\angle CED$。设 $O_A,O_B,O_C$ 分别为 $\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 的外心。$M,N,O$ 分别为 $\triangle ABC,\triangle DEF,\triangle O_AO_BO_C$ 的外心。求证：$OM=ON$。
6. 第二天第 6 题　设正整数 $a,b$ 满足 $\varphi(ab+1)\mid a^2+b^2+1$。求证：$a$ 和 $b$ 均为斐波那契数。