一道 IMO 题目的经典构造

2021-07-18 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_08683529c2f5d32c

今天给学生讲了 1977 年 IMO 的第 2 题：

> 若自然数 n 满足如下条件：存在由 n 个实数组成的数列，使得任意连续 7 项之和为负，任意连续 11 项之和为正．求 n 的最大值.

首先容易得到 n 的一个上界 77，这是因为如果 $n \geq 77$，则取数列的前 77 项，并进行分组求和：

$$\begin{aligned} S_{77} =&(a_1 + a_2 + \cdots + a_7) \\ &+ (a_8 + a_9 + \cdots + a_{14}) \\ &+ \cdots \\ &+ (a_{71} + a_{72} + \cdots + a_{77}) \end{aligned}$$

上式的每一个括号均为负，故 S_{77} 为负.

同样的，

$$\begin{aligned} S_{77} =&(a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}) \\ &+ (a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{22}) \\ &+ \cdots \\ &+ (a_{67} + a_{68} + \cdots + a_{77}) \end{aligned}$$

上式的每一个括号均为正，故 S_{77} 为正.

这两者是矛盾的，于是 $n < 77$.

上面的分组方式可以进行改进，将 a_1，a_2，$\cdots$，a_{17} 按照下表排布：

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_{11} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_7 & a_8 & \cdots & a_{17} \end{array}$$

注意到上表中每一行为连续 11 个数之和，每一列为连续 7 个数之和．故计算上表所有数之和时，若按行计算，则总和为正；若按列计算，则总和为负．因此矛盾，于是 $n < 17$.

下面我们给出 $n = 16$ 的构造，为方便处理连续 k 项之和，我们设 $\{a_n\}$ 的部分和数列 $\{S_n\}$：

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

并定义 $S_0 = 0$.

于是由任意连续 11 项之和为正知：$S_{k+11} - S_k > 0$，即 $S_{k+11} > S_k$.

由任意连续 7 项之和为负知：$S_{k+7} - S_k < 0$，即 $S_{k+7} < S_k$.

从 S_0 出发，得到下面两串不等式链：

$$\begin{aligned} S_0 < S_{11} < S_4 < S_{15} < S_8 < S_1 < S_{12} \\ < S_5 < S_{16} < S_9 < S_2 < S_{13} < S_6 \end{aligned}$$

$$S_0 > S_7 > S_{14} > S_3 > S_{10}$$

上面两个不等式链中恰好出现 S_0 到 S_{16} 的所有数. 接下来按照大小顺序进行赋值即可.

由 $S_0 = 0$ 可令 $S_{11} = 1$，$S_4 = 2$，$S_{15} = 3$，$S_8 = 4$，$S_1 = 5$，$S_{12} = 6$，$S_5 = 7$，$S_{16} = 8$，$S_9 = 9$，$S_2 = 10$，$S_{13} = 11$，$S_6 = 12$，$S_7 = -1$，$S_{14} = -2$，$S_3 = -3$，$S_{10} = -4$.

由此求得：$a_1 = 5$，$a_2 = 5$，$a_3 = -13$，$a_4 = 5$，$a_5 = 5$，$a_6 = 5$，$a_7 = -13$，$a_8 = 5$，$a_9 = 5$，$a_{10} = -13$，$a_{11} = 5$，$a_{12} = 5$，$a_{13} = 5$，$a_{14} = -13$，$a_{15} = 5$，$a_{16} = 5$.

容易发现，上述数列中任意连续 7 项中均有 5 个 5 和 2 个 -13，和为 -1；任意连续 11 项中均有 8 个 5 和 3 个 -13，和为 1.

上述将数列中连续 k 项之和转化为部分和数列之差的方法是非常常见的，比如初中小蓝本《组合趣题》书上的一道例题：

一个大学生在去年暑假用了 k 天学习高等数学，并遵循如下规则：

1. 每天至少学习 1 小时；
2. 每天按整小时学，且最多学 12 小时；
3. 全部学习时间不超过 60 小时.

求 k 的最小值，使得该大学生在此期间一定存在连续的若干天，学习高等数学的时间总和为 13 小时.