一分钟做不等式系列（7）——2025 年波兰第二轮

2025-02-19　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_086f2788af345c33

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

26 (2025 年波兰第二轮). 给定正整数 $k \leq n$. 假设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$，且 $0 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_k$. 数列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $a_1, \ldots, a_n$ 的一个排列，且满足 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j-i)^2 a_i a_j \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j-i)^2 b_i b_j.$$

证明 不等式等价于 $\sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i)^2 a_i a_j \leq \sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i)^2 b_i b_j$.

对 n 归纳，$n=1,2$ 时，不等式显然成立.

假设不等式在 n 时成立，那么在 $n+1$ 时，由题意可不妨设 $b_1 = a_1$（否则可将 $a_1, \cdots, a_{n+1}$ 反序排列）.

由归纳假设，$\sum_{2\leq i<j\leq n+1}(j-i)^2 a_i a_j \leq \sum_{2\leq i<j\leq n+1}(j-i)^2 b_i b_j$.

故只需证：$\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2 a_1 a_k \leq \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2 b_1 b_k$，

由 $a_1 = b_1 \geq 0$，即证：$\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 b_k$.

由排序不等式，显然成立.

不妨设 b_1=a_1 这一步比较关键，想到自然就完成了归纳递推。