2023 年韩国数学奥林匹克决赛第 6 题不等式证明

2023-03-29　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_087044b03b380593

对正整数 $n \geq 3$ 和实数 a_1，$\cdots$，a_n，b_1，$\cdots$，b_n，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_{i+3}) \leq \frac{3n}{8} \sum_{i=1}^{n}((a_i - a_{i+1})^2 + (b_i - b_{i+1})^2)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$，对 $i = 1, 2, 3$，$b_{n+i} = b_i$.

左边为积求和，右边为平方和求和，根据形式猜测可以用 AM-QM 不等式，进行待定系数.

设 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_{i+3}) \leq \frac{1}{2}\left(t\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{t}\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - b_{i+3})^2\right)$

而

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i+3})^2 \\
=&\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{i+2}(b_k - b_{k+1})\right)^2 \\
\leq&\sum_{i=1}^{n}\left(3\sum_{k=i}^{i+2}(b_k - b_{k+1})^2\right) \text{——(Cauchy不等式)} \\
=&9\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i+1})^2
\end{aligned}$$

于是

$$\text{LHS} \leq \frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{9}{2t}\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i+1})^2$$

而

$$\text{RHS} = \frac{3n}{8}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1})^2 + \frac{3n}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i+1})^2$$

对比 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - b_{i+1})^2$ 系数，可令 $\frac{9}{2t} = \frac{3n}{8}$，即 $t = \frac{12}{n}$.

故只需证明关于 a_i 的不等式：

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \frac{3n}{8}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1})^2 \\
\Longleftrightarrow\ &\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \frac{n^2}{16}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1})^2
\end{aligned}$$

此时联想到了这种类型的几道不等式，其中比较经典的是 2006 年 CMO 第 1 题：

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求证：$\max\limits_{1\le k\le n} a_k^2 \le \dfrac{n}{3}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2$.

其中条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$ 起到了关键的转化作用，但本题并没有这一条件.

由齐次无法不妨设和为 0，可以不妨设和为 0 的平移不变性在上式中也不存在. 此时似乎陷入了僵局，但我们再往前看看，回到原题要证明的不等式：

将 a_i 替换为 $a_i + a$，则

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(a_i+a)(b_i-b_{i+3})\\=&\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i-b_{i+3})+a\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i+3})\\=&\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i-b_{i+3})\end{aligned}$$

左边式子没有发生改变，右边显然也不会发生改变. 于是原题要证明的不等式具有平移不变性，可以不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$.

因此我们将问题转化为了：

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \le \dfrac{n^2}{16}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2$.

先利用和为 0 的条件，将左边的平方和转化为差的平方和形式，可以想到 Lagrange 恒等式：

$$\begin{aligned}n\sum_{i=1}^{n}a_i^2=&n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\\=&\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2\end{aligned}$$

为方便书写，设 $d_i = a_i - a_{i+1}$，$i = 1$，2，$\cdots$，n. 则

$$
\begin{aligned}
&2n\sum_{i=1}^{n}a_i^2\\
=&\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^2\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+k})^2\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{i+k-1}d_j\right)^2\\
\leq&\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(k\sum_{j=i}^{i+k-1}d_j^2\right)\text{——(Cauchy不等式)}\\
=&\sum_{i=1}^{n}(1^2+\cdots+(n-1)^2)d_i^2\text{——(计每个}d_j^2\text{出现的次数)}\\
=&\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\sum_{i=1}^{n}d_i^2
\end{aligned}
$$

而 $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}>\frac{n^3}{8}$, 不等号反向了, 于是需要对上面的放缩过程进行改进. 考虑到 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_i=0$，于是在 k 较大时（$>\left[\frac{n}{2}\right]$），可用相反数来代替 $\sum\limits_{j=i}^{i+k-1}d_j$（即取补集），平方相等，例如 $\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}d_j\right)^2=d_n^2$.

因此

$$
\begin{aligned}
&2n\sum_{i=1}^{n}a_i^2\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{i+k-1}d_j\right)^2\\
\leq&\sum_{i=1}^{n}(\underbrace{1^2+2^2+\cdots+2^2+1^2}_{n-1\text{项}})d_i^2
\end{aligned}
$$

n 为奇数时，设 $n=2k+1$，则

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+\cdots+2^2+1^2\\
=&2(1^2+2^2+\cdots+k^2)\\
=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{3}\\
<&\frac{(2k+1)^3}{8}
\end{aligned}
$$

n 为偶数时，设 $n=2k$，则

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+\cdots+2^2+1^2\\
=&2(1^2+2^2+(k-1)^2)+k^2\\
=&\frac{(k-1)k(2k-1)}{3}+k^2\\
<&\frac{(2k)^3}{8}
\end{aligned}$$

总有

$$2n\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leq\frac{n^3}{8}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leq\frac{n^2}{16}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2$$

证毕.