Mathematical Reflections 2022 年第六期征解题

2022-11-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_08d17a9ee48215bc

Junior Problems

J607. 求所有整数 k，使得对任意整数 m 和 n，
$(3m^2-4n^2)^2+(4m^2-3n^2)^2+7mn(10m^2+kmn+10n^2)$ 均为完全平方数.

J608. a,b,c,d 均为整数，且满足 ad 为奇数，bc 为偶数. 求证：若方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

的所有根均为实数，则至少有一个根为无理数.

J609. 求所有三元实数组 (x,y,z)，使得

$$\begin{cases} x^2-9y-2\sqrt{z-4}+22=0 \\ y^2-9z-2\sqrt{x-4}+22=0 \\ z^2-9x-2\sqrt{y-4}+22=0 \end{cases}$$

J610. a,b,c 为 $[0,1]$ 上三个互异的实数. 求

$$\frac{1}{\sqrt{|a-b|}}+\frac{1}{\sqrt{|b-c|}}+\frac{1}{\sqrt{|c-a|}}$$

的最小值.

J611. a,b,c 均为正实数. 求证：

$$\begin{aligned} &3(ab+bc+ca) \\ \le& a\sqrt{b^2+8c^2}+b\sqrt{c^2+8a^2}+c\sqrt{a^2+8b^2} \\ \le& (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

J612. $ABCD$ 为平行四边形. 过点 C 作 $\triangle BCD$ 的外接圆交直线 AB 于点 E，交直线 AD 于点 F. 设 O 为 $\triangle AEF$ 的外心. 求证：$AO\perp BD$.

Senior Problems

S607. 设 k 为正整数，$a=1+k^2(2k^2+1)(2k^2+2k+1)$，$b=2k^2$. 求证：对任意正整数 n，ab^n+1 均为合数.

S608. 设 a,b,c 为正实数，求证：

$$\begin{aligned}&\frac{3}{a^3+b^3+c^3}\\ \leq&\frac{1}{a(a^2+2bc)}+\frac{1}{b(b^2+2ca)}+\frac{1}{c(c^2+2ab)}\\ \leq&\frac{1}{abc}\end{aligned}$$

S609. 设 $\triangle ABC$ 的三条中线长为 m_a，m_b，m_c，面积为 Δ. 求证：

$$\begin{aligned}&\sqrt{2(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a-3\sqrt{3}\Delta)}\\ \geq&\max\{m_a,m_b,m_c\}-\min\{m_a,m_b,m_c\}\end{aligned}$$

S610. 求证：在任意 $\triangle ABC$ 中，

$$\begin{aligned}&\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\ \leq&\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\end{aligned}$$

S611. 素数 p，q 满足 $p\equiv-23\pmod{60}$，$q\equiv-47\pmod{120}$，$q=2p-1$，设 $n=pq$. 求证：n 满足以下结论：

$$n\mid 2^n-2, n\mid 3^n-3, n\not\mid 5^n-5$$

S612. 给定平面上一个三角形 $\triangle ABC$ 和一点 O. 设 $D=AO\cap BC, E=BO\cap AC, F=CO\cap AB$，$Q=DF\cap AC$，$R=DE\cap AB$，$S=AD\cap RQ$. 过点 B 且平行于 DE 的直线交 AC 于点 X，过点 C 且平行于 DF 的直线交 AB 于点 Y. 设 $XY\cap BC=T$. 若 SB,SC,SE,SF 分别和 AT 交于点 K,L,M,N. 求证：$|KN|=|NA|=|AM|=|ML|$.

Undergraduate Problems

U607. 设 p 为素数，整数 m,n 满足 $m\geq n\geq 0$，求证：

$$\begin{aligned}&\binom{2p+m}{2p+n}+\binom{m}{n}+\binom{m}{2p+n}+2\binom{m}{p+n}\\ \equiv&\left[2\binom{p+m}{p+n}+2\binom{p+m}{2p+n}\right]\pmod{p^2}\end{aligned}$$

U608. 考虑形式幂级数：

$$f(x)=x+x^2+x^4+x^8+x^{16}+\cdots$$

求 $f(f(x))$ 展开式中 x^{10} 的系数.

U609. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数，且满足对任意 $x\in[0,1]$，都有 $f(x)\geq 2x$. 记

$$I_f=\int_0^1 xf(x)^3\mathrm{d}x, I_g=\int_0^1 x^3f(x)\mathrm{d}x$$

求 I_f-3I_g 的最小值.

U610. 设 n 为正整数，求值：

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^\infty \binom{n}{k}(-1)^k\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right\}\mathrm{d}x$$

U611. 称由实数组成的集合 A 为“好的”，如果存在互异的非零实数 $x_1,\cdots,x_n\in A$，和不全为零的整数 $y_1,\cdots,y_n$，使得

$$x_1^{y_1}\cdots x_n^{y_n}=1$$

设 $P(x)$ 是一个有理系数的二次多项式. 求证：集合

$$\{P(n)\mid n\in\mathbb{N},n>0\}$$

是“好的”.

U612. 设 n 为非负实数，$m\in\{0,1,2,\cdots,n\}$. 求值：

$$\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n+m}$$

Olympiad Problems

O607. 设 $a_1,\cdots,a_k$ 和 b 均为正整数，设 $f(t)=(t+a_1)\cdots(t+a_k)$. 求证：存在无穷多个正整数 n，使得 $P(f(n))\geq P(f(n+b))$，其中 $P(m)$ 为整数 $m\geq 2$ 的最大素因子.（例如 $P(81)=P(3)=3$，$P(56)=P(14)=7$.）

O608. 求正整数 k 的最小可能值，使得不定方程

$$x^2+kxy+y^2=2022$$

有正整数解.

O609. $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，外心为 O，点 D,E 在边 BC 上，且满足 $\angle BAD=\angle CAE$. 过 D 作 AD 的垂线与 AB,AC 分别交于点 K,L；过 E 作 AE 的垂线与 AB,AC 分别交于点 M,N. $\triangle AMN$ 和 $\triangle AKL$ 的外接圆分别与 Γ 再次交于点 F,G. 求证：D,E,F,G 四点共圆.

O610. a,b,c 均为正实数，求证：

$$a^2\sqrt{\frac{a+b}{a+c}}+b^2\sqrt{\frac{b+c}{b+a}}+c^2\sqrt{\frac{c+a}{c+b}}\geq ab+bc+ca$$

O611. 设 $m \geq 2$，$a_1,\cdots,a_m$ 为不全相等的正整数. 求证：存在有限多个正整数 n，使得 $(n+a_1)\cdots(n+a_m)$ 为一个正整数的 m 次幂.

O612. 正实数 a,b,c,d,e 满足

$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+abcde=6$$

求证：$a+bcde \leq 2$.