齐次化思想在代数变形中的应用

2021-12-10　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0904aa5e004e3b49

在数学中，我们把一个代数式中各项的次数都相同的式子称为齐次式. 更严谨的定义如下：设含有变量 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的 (不) 等式，如果对任意正数 λ，用 λx_1、λx_2、$\cdots$、λx_n 去替代 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 所得的 (不) 等式不改变，则称这个 (不) 等式是齐次 (不) 等式，否则，称这个 (不) 等式是非齐次 (不) 等式.

齐次式体现了数学的对称之美，有许多重要的乘法公式以及不等式 (如完全平方公式、完全立方公式、欧拉恒等式、均值不等式、柯西不等式以及 Schur 不等式) 都是齐次式，所以我们常常把非齐次式转化为齐次式来考虑，这样可以化繁为简，达到事半功倍的效果. 反过来，对于某些齐次式，如果我们增加条件 (如 $abc=1$，$a+b+c=1$) 将它非齐次化，有时也会减少不必要的复杂运算，化难为易.

下面以若干道试题为例，谈谈齐次化思想在代数变形中的应用.

例题：

1. 若 $a+b=1$，求 a^3+b^3+3ab.

分析：这题难度很低，但其中思想值得品味. 通过一个非齐次式 $a+b=1$，将 1 换成 $a+b$，可以进行局部的升次，从而将 a^3+b^3+3ab 变为齐次式，拥有了更多的可能性.

解答（PDF 中已展开）

解答：

$$a^3+b^3+3ab=a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3=1$$

1. (2009 年全国初中数学联赛) 正实数 a，b，c 满足下列两个条件：

- $a+b+c=32$；
- $\dfrac{b+c-a}{bc}+\dfrac{c+a-b}{ca}+\dfrac{a+b-c}{ab}=\dfrac{1}{4}$.

求证：以 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 为边长可以构成一个直角三角形.

解答（PDF 中已展开）

分析：若要证明以 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 为边长可以构成一个直角三角形，则需要证明 $a+b=c$ 或 $b+c=a$ 或 $c+a=b$，也即是证明 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$. 这是一个齐次式，而条件中的两个式子都是非齐次式，可以将两式相乘进行齐次化.

证明：将条件式相乘得：$(a+b+c)\left(\dfrac{b+c-a}{bc}+\dfrac{c+a-b}{ca}+\dfrac{a+b-c}{ab}\right)=8.$

即 $a\left[(b+c)^2-a^2\right]+b\left[(c+a)^2-b^2\right]+c\left[(a+b)^2-c^2\right]=8abc.$

因式分解得：$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$，证毕.

1. 非负实数 a，b，c 满足 $a\le b\le c$，$a+b+c=16$，$a^2+b^2+c^2+\dfrac{1}{4}abc=128$，求 c 的值.

解答（PDF 中已展开）

分析：和第 2 题类似.

解答：由 $a^2+b^2+c^2+\dfrac{1}{4}abc=128$ 得：$32\left(a^2+b^2+c^2+\dfrac{1}{4}abc\right)=4096$，即 $2\cdot16(a^2+b^2+c^2)+8abc=16^3$，也即 $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+8abc=(a+b+c)^3$. 展开整理得 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$. 又因为 $a\le b\le c$，所以 $a+b=c$，即 $c=8$.

1. 设 $x=by+cz$，$y=cz+ax$，$z=ax+by$，求 $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}$ 的值.

解答（PDF 中已展开）

分析：先令待求式中产生 x，y，z，再利用条件进行齐次化.

解答：

$$\begin{aligned}&\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\\=&\frac{ax}{ax+x}+\frac{by}{by+y}+\frac{cz}{cz+z}\\=&\frac{ax}{ax+by+cz}+\frac{by}{by+cz+ax}+\frac{cz}{cz+ax+by}\\=&1\end{aligned}$$

1. (2005 年中国女子数学奥林匹克）解方程组：

$$\begin{cases}5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\\xy+yz+zx=1\end{cases}$$

解答（PDF 中已展开）

分析：将 $5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ 中的 1 换成 $xy+yz+zx$，即可进行齐次化并因式分解.

解答： $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+xy+yz+zx}{x}=\dfrac{(x+y)(x+z)}{x}$.

故条件可变为 $5yz(x+y)(x+z)=12xz(y+x)(y+z)=13xy(z+x)(z+y)$.

设

$$\begin{cases}x(y+z)=a\\y(z+x)=b\\z(x+y)=c\end{cases}$$

，则 $a+b+c=2$，且 $5bc=12ca=13ab$，即 $\dfrac{5}{a}=\dfrac{12}{b}=\dfrac{13}{c}=k$．代入 $a+b+c=2$ 得 $k=15$．

进而

$$\begin{cases} xy+xz=\dfrac{5}{15} \\ yz+xy=\dfrac{12}{15} \\ zx+zy=\dfrac{13}{15} \end{cases}$$

，即

$$\begin{cases} yz=\dfrac{10}{15} \\ zx=\dfrac{3}{15} \\ xy=\dfrac{2}{15} \end{cases}$$

.

三式相乘，得 $xyz=\pm\sqrt{\dfrac{10}{15}\cdot\dfrac{3}{15}\cdot\dfrac{2}{15}}=\pm\dfrac{2}{15}$，故原方程组有两组解：$\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{3},1\right)$ 和 $\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{2}{3},-1\right)$.

1. 已知 $abc=1$，化简 $\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{1}{1+b+bc}+\dfrac{1}{1+c+ca}$.

解答（PDF 中已展开）

分析：对于 $abc=1$ 这类条件，可设 $a=\dfrac{q}{p}$，$b=\dfrac{r}{q}$，由 $abc=1$ 可得 $c=\dfrac{p}{r}$．从而进行齐次化.

解答：同分析中进行换元.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca} \\ =&\frac{1}{1+\frac{q}{p}+\frac{r}{p}}+\frac{1}{1+\frac{r}{q}+\frac{p}{q}}+\frac{1}{1+\frac{p}{r}+\frac{q}{r}} \\ =&\frac{p}{p+q+r}+\frac{q}{p+q+r}+\frac{r}{p+q+r} \\ =&1 \end{aligned}$$

1. (2000 年澳门数学奥林匹克) 设正实数 a，b，c 满足 $abc=1$．求证：

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq 1.$$

解答（PDF 中已展开）

分析：若仿照上题换元，则会发现方法失效了．因为本题分母的次数还是比较均匀的，只有一项 1 不齐次．这里选择进行升次后再将 1 代换，进行齐次化.

证明：设 $a=x^3$，$b=y^3$，$c=z^3$，则 $abc=x^3y^3z^3=1$，即 $xyz=1$.

于是 $\dfrac{1}{a+b+1}=\dfrac{xyz}{x^3+y^3+xyz}\leq\dfrac{xyz}{x^2y+xy^2+xyz}=\dfrac{z}{x+y+z}$.

同理有 $\dfrac{1}{b+c+1}\leq\dfrac{x}{x+y+z}$，$\dfrac{1}{c+a+1}\leq\dfrac{y}{x+y+z}$，三式相加即证.

对于齐 m 次式 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$，将 a_i 换成 ka_i，得到 $f(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)=0$，即 $k^mf(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$．因此我们可以不妨设和为 1，积为 1 等，将问题进行简化.

1. 设 a,b,c 是正实数，求证：

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2\geq 4\sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

解答（PDF 中已展开）

分析：待证式过于复杂，可由齐次性将其中某部分设为常数.

证明：由齐次性不妨设 $a+b+c=1$，故只需证：$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+1\geq 4\sqrt{3abc}$.
即证 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\dfrac{1}{\sqrt{abc}}\geq 4\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{abc}}\\
=&\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+9\cdot\frac{1}{9\sqrt{abc}}\\
\geq&12\sqrt[12]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\cdot\left(\frac{1}{9\sqrt{abc}}\right)^9}\\
=&\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{abc}}\\
\geq&\frac{4\sqrt{3}}{a+b+c}\\
=&4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

证毕.

练习：

1. 正实数 x，y 满足 $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$. 证明：$x+y=10$.

2. (2019 年欧洲女子数学奥林匹克）解方程组：

$$\begin{cases}ab+bc+ca=1\\ a^2b+c=b^2c+a=c^2a+b\end{cases}$$

1. (2000 年国际数学奥林匹克) 设正实数 a，b，c 满足 $abc=1$. 求证：

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1.$$

1. (1984 年国际数学奥林匹克) 非负实数 x，y，z 满足 $x+y+z=1$. 求证：

$$0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq\frac{7}{27}.$$

1. (2003 年美国数学奥林匹克) 设 a，b，c 为非负实数，求证：

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$