# 2024 年广州市增城区高联预赛试题

2024-06-01　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_09d0aee5f6d94e86

## 2024 年广州市中学生数学与科学联赛（数学）活动

## 增城区预赛一试试题

### 一、填空题（每题 7 分，共 70 分）

**1.** 在复数范围内方程 $x^2-4x+5=0$ 的两根为 $\alpha,\beta$，则 $|\alpha|+|\beta|=$ _____.

**2.** 方程 $\lg(\sqrt{3}\sin x)=\lg(-\cos x)$ 的解集为 _____.

**3.** 正整数集合 $A_k$ 的最小元素为 1，最大元素为 2007，并且各元素可以从小到大排成一个公差为 $k$ 的等差数列，则集合 $A_{17}\cup A_{59}$ 中的元素个数为 _____.

**4.** 已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为 1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为 _____.

**5.** 已知函数 $f(x)=\log_a\left(\frac{1}{2}ax^2-x+\frac{1}{x}\right)$ 在区间 $[2,3]$ 上恒正，则实数 $a$ 的取值范围为 _____.

**6.** 设 $S$ 是不等式 $\left|x-\frac{1}{2}\right|\le 3$ 的解集，整数 $m,n\in S$，若 $\vec{p}=(m,n)$，$\vec{q}=(-1,2)$，则 $\vec{p}\perp\vec{q}$ 的概率为 _____，设 $\xi=m^2$，则其数学期望 $E(\xi)$ 为 _____.

**7.** 实数 $x,y$ 满足 $3x^2+2y^2\le 6$，则 $2x+3y$ 的最大值是 _____.

**8.** 实数 $x,y$ 满足 $x|x|+\frac{y|y|}{3}=1$，则 $|\sqrt{3}x+y-4|$ 的取值范围是 _____.

**9.** 将大小相同 5 个不同颜色的小球，放在 $A,B,C,D,E$ 共 5 个盒子中，每个球可以任意放在一个盒子里，则恰有两个盒子空且 $A$ 盒子最多放 1 个球的放球方法总数为 _____.

**10.** 若 $2^6+2^9+2^n$ 为一个平方数，则正整数 $n=$ _____.

## 二、解答题（共 50 分）

**11.**（本题 16 分）已知曲线 $C_n: x^2-2nx+y^2=0$（$n=1,2,\cdots$）. 从点 $P(-1,0)$ 向曲线 $C_n$ 引斜率为 $k_n$（$k_n>0$）的切线 $l_n$，切点为 $P_n(x_n,y_n)$.

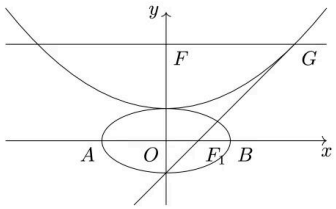
(1) 求数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：$x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\dfrac{x_n}{y_n}$.

**12.**（本题 17 分）设 $b>0$，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$. 如图所示，过点 $F(0,b+2)$ 作 $x$ 轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为 $G$，已知抛物线在点 $G$ 的切线经过椭圆的右焦点 $F_1$.

(1) 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

(2) 设 $A,B$ 分别是椭圆长轴的左、右焦点，试探究在抛物线上是否存在点 $P$，使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）.




**13.**（本题 17 分）设 $f(x)=ax^2+\cos x-1$，$a\in\mathbb{R}$.

(1) 当 $a=\dfrac{1}{\pi}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

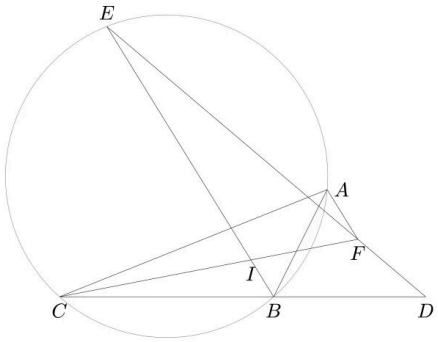
(2) 当 $a\geq\dfrac{1}{2}$ 时，求证：$f(x)\geq 0$；

(3) 求证：$\cos\dfrac{1}{2}+\cos\dfrac{1}{3}+\cdots+\cos\dfrac{1}{n}>n-\dfrac{4}{3}$（$n\in\mathbb{N}^*$，$n>1$）.

# 2024 年广州市中学生数学与科学联赛（数学）活动

## 增城区预赛二试试题

**1.（本题满分 40 分）**如图，$I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\angle A$ 的外角平分线交 $BC$ 于点 $D$，直线 $BI$ 交 $\triangle ABC$ 外接圆于点 $E$，直线 $CI$ 与直线 $DE$ 交点为 $F$．证明：$AF \parallel BE$．




**2.（本题满分 40 分）**已知实数 $a, b, c$ 均不等于 0，且 $a+b+c=m$，$a^2+b^2+c^2=\dfrac{m^2}{2}$，求 $\dfrac{a(m-2a)^2+b(m-2b)^2+c(m-2c)^2}{abc}$ 的值．




**2024 年广州市中学生数学与科学联赛（数学）活动**

**增城区预赛一试试题**

**一、填空题（每题 7 分，共 70 分）**

1. 在复数范围内方程 $x^{2}-4x+5=0$的两根为 $\alpha,\beta$，则 $|\alpha|+|\beta|=$.

2. 方程 $\lg(\sqrt{3}\sin x)=\lg(-\cos x)$的解集为.

3. 正整数集合 $A_{k}$的最小元素为 $1$，最大元素为 $2007$，并且各元素可以从小到大排成一个公差为 $k$的等差数列，则集合 $A_{17}\cup A_{59}$中的元素个数为.

4. 已知正三棱锥 $P-ABC$底面边长为 $1$，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为.

5. 已知函数 $f(x)=\log_{a}\left(\frac{1}{2}ax^{2}-x+\frac{1}{x}\right)$在区间 $[2,3]$上恒正，则实数 $a$的取值范围为.

6. 设 $S$是不等式 $\left| x-\frac{1}{2}\right|\le 3$的解集，整数 $m,n\in S$，若 $\vv{p}=(m,n)$，$\vv{q}=(-1,2)$，则 $\vv{p}\perp\vv{q}$的概率为，设 $\xi=m^{2}$，则其数学期望 $E(\xi)$为.

7. 实数 $x,y$满足 $3x^{2}+2y^{2}\le 6$，则 $2x+3y$的最大值是.

8. 实数 $x,y$满足 $x|x|+\frac{y|y|}{3}=1$，则 $|\sqrt{3}x+y-4|$的取值范围是.

9. 将大小相同 $5$个不同颜色的小球，放在 $A,B,C,D,E$共 $5$个盒子中，每个球可以任意放在一个盒子里，则恰有两个盒子空且 $A$盒子最多放 $1$个球的放球方法总数为.

10. 若 $2^{6}+2^{9}+2^{n}$为一个平方数，则正整数 $n=$.

**二、解答题（共 50 分）**

11.（本题 16 分）已知曲线 $C_{n}:x^{2}-2nx+y^{2}=0$（$n=1,2,\cdots$）. 从点 $P(-1,0)$向曲线 $C_{n}$引斜率为 $k_{n}$（$k_{n}>0$）的切线 $l_{n}$，切点为 $P_{n}(x_{n},y_{n})$.

1. 求数列 $\{x_{n}\}$与 $\{y_{n}\}$的通项公式；
2. 证明：$x_{1}\cdot x_{3}\cdot x_{5}\cdot \cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_{n}}{1+x_{n}}}<\sqrt{2}\sin\frac{x_{n}}{y_{n}}$.

12.（本题 17 分）设 $b>0$，椭圆方程为 $\frac{x^{2}}{2b^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$，抛物线方程为 $x^{2}=8(y-b)$. 如图所示，过点 $F(0,b+2)$作 $x$轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为 $G$，已知抛物线在点 $G$的切线经过椭圆的右焦点 $F_{1}$.

1. 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；
2. 设 $A,B$分别是椭圆长轴的左、右焦点，试探究在抛物线上是否存在点 $P$，使得 $\triangle ABP$为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）.

作图代码

```
\draw[->] (-5,0) -- (5,0) node[below] {$x$};\draw[->] (0,-2) -- (0,4) node[left] {$y$};\draw (0,0) ellipse [x radius=2, y
↪  radius=1];\draw[domain = -5 : 5] plot (\x,{0.125*\x*\x+1});\draw(-5,3)--(5,3);\draw(-1,-2)--(4,3);\node[below left] at (0,0)
↪  {$O$};\node[below left] at (-2,0) {$A$};\node[below right] at (2,0) {$B$};\node[below right] at (4,3) {$G$};\node[below right] at
↪  (1,0) {$F_{1}$};\node[below right] at (0,3) {$F$};
```

13.（本题 17 分）设 $f(x)=ax^{2}+\cos x-1$，$a\in\mathbb{R}$.

1. 当 $a=\frac{1}{\pi}$时，求函数 $f(x)$的最小值；
2. 当 $a\ge\frac{1}{2}$时，求证：$f(x)\ge 0$；
3. 求证：$\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{3}+\cdots+\cos\frac{1}{n}>n-\frac{4}{3}$（$n\in\mathbb{N}^{*}$，$n>1$）.

**2024 年广州市中学生数学与科学联赛（数学）活动**

**增城区预赛二试试题**

1. **（本题满分 40 分）**如图，$I$是 $\triangle ABC$的内心，$\angle A$的外角平分线交 $BC$于点 $D$，直线 $BI$交 $\triangle ABC$外接圆于点 $E$，直线 $CI$与直线 $DE$交点为 $F$. 证明：$AF\parallel BE$.

作图代码

```
\tkzDefPoints{1/2/A,0/0/B,-4/0/C}\tkzDefTriangleCenter[circum](A,B,C)\tkzGetPoint{O}\tkzDefTriangleCenter[in](A,B,C)\tkzGetP
↪ oint{I}\tkzDefTriangleCenter[ex](B,C,A)\tkzGetPoint{I_c}\tkzInterLL(A,I_c)(B,C)\tkzGetPoint{D}\tkzInterLC(B,I)(O,A)\tkzGetS
↪ econdPoint{E}\tkzInterLL(C,I)(D,E)\tkzGetPoint{F}\tkzDrawSegments(A,B A,C C,D D,E B,E C,F
↪ A,F)\tkzDrawCircle(O,A)\tkzLabelPoints[right](A)\tkzLabelPoints[above](E)\tkzLabelPoints[below](I,B,C,D,F)
```

2. **（本题满分 40 分）**已知实数 $a,b,c$均不等于 $0$，且 $a+b+c=m$，$a^{2}+b^{2}+c^{2}=\frac{m^{2}}{2}$，求 $\frac{a(m-2a)^{2}+b(m-2b)^{2}+c(m-2c)^{2}}{abc}$的值.

**解答（PDF 中已展开）**

```
\section*{2024年广州市中学生数学与科学联赛（数学）活动}\section*{增城区预赛一试试题}\subsection*{一、填空题（每题7分，
↪ 共70分）}\ex 在复数范围内方程$x^{2}-4x+5=0$的两根为$\alpha,\beta$，则$|\alpha|+|\beta|=$\mtk{}. \ex 方程$\lg(\sqrt{3}\sin
↪ x)=\lg(-\cos x)$的解集为\mtk{}. \ex 正整数集合$A_{k}$的最小元素为$1$，最大元素为$2007$，
↪ 并且各元素可以从小到大排成一个公差为$k$的等差数列，则集合$A_{17}\cup A_{59}$中的元素个数为\mtk{}. \ex
↪ 已知正三棱锥$P-ABC$底面边长为$1$，高为$\sqrt{2}$，则其内切球半径为\mtk{}. \ex
↪ 已知函数$f(x)=\log_{a}\left(\frac{1}{2}ax^{2}-x+\frac{1}{x}\right)$在区间$[2,3]$上恒正，则实数$a$的取值范围为\mtk{}. \ex
↪ 设$S$是不等式$\left|x-\frac{1}{2}\right|\le 3$的解集，整数$m,n\in S$，若$\vv{p}=(m,n)$，$\vv{q}=(-1,2)$，
↪ 则$\vv{p}\perp\vv{q}$的概率为\mtk{}，设$\xi=m^{2}$，则其数学期望$E(\xi)$为\mtk{}. \ex 实数$x,y$满足$3x^{2}+2y^{2}\le 6$，
↪ 则$2x+3y$的最大值是\mtk{}. \ex 实数$x,y$满足$x|x|+\frac{y|y|}{3}=1$，则$|\sqrt{3}x+y-4|$的取值范围是\mtk{}. \ex
↪ 将大小相同$5$个不同颜色的小球，放在$A,B,C,D,E$共$5$个盒子中，每个球可以任意放在一个盒子里，
↪ 则恰有两个盒子空且$A$盒子最多放$1$个球的放球方法总数为\mtk{}. \ex 若$2^{6}+2^{9}+2^{n}$为一个平方数，
↪ 则正整数$n=$\mtk{}. \subsection*{二、解答题（共50分）}\ex （本题16分）已知曲线$C_{n}:x^{2}-2nx+y^{2}=0$
↪ （$n=1,2,\cdots$）．从点$P(-1,0)$向曲线$C_{n}$引斜率为$k_{n}$（$k_{n}>0$）的切线$l_{n}$，切点为$P_{n}(x_{n},y_{n})$.
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求数列$\{x_{n}\}$与$\{y_{n}\}$的通项公式；\item 证明：$x_{1}\cdot x_{3}\cdot
↪ x_{5}\cdot \cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_{n}}{1+x_{n}}}<\sqrt{2}\sin\frac{x_{n}}{y_{n}}$. \end{enumerate}\vfill\ex
↪ （本题17分）设$b>0$，椭圆方程为$\frac{x^{2}}{2b^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$，抛物线方程为$x^{2}=8(y-b)$. 如图所示，
↪ 过点$F(0,b+2)$作$x$轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为$G$，已知抛物线在点$G$的切线经过椭圆的右焦点$F_{1}$.
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；\item 设$A,B$分别是椭圆长轴的左、右焦点，
↪ 试探究在抛物线上是否存在点$P$，使得$\triangle ABP$为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由
↪ （不必具体求出这些点的坐标）．\end{enumerate}\begin{figure}[h]\centering\begin{tikzpicture}[scale=0.6]\draw[->] (-5,0) --
↪ (5,0) node[below] {$x$};\draw[->] (0,-2) -- (0,4) node[left] {$y$};\draw (0,0) ellipse [x radius=2, y radius=1];\draw[domain = -5 :
↪ 5] plot (\x,{0.125*\x*\x+1});\draw(-5,3)--(5,3);\draw(-1,-2)--(4,3);\node[below left] at (0,0) {$O$};\node[below left] at (-2,0)
↪ {$A$};\node[below right] at (2,0) {$B$};\node[below right] at (4,3) {$G$};\node[below right] at (1,0) {$F_{1}$};\node[below right]
↪ at (0,3) {$F$};\end{tikzpicture}\end{figure}\vfill\ex （本题17分）设$f(x)=ax^{2}+\cos x-1$，$a\in\mathbb{R}$.
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 当$a=\frac{1}{\pi}$时，求函数$f(x)$的最小值；\item 当$a\ge\frac{1}{2}$时，求证：
↪ $f(x)\ge 0$；\item 求证：$\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{3}+\cdots+\cos\frac{1}{n}>n-\frac{4}{3}$（$n\in\mathbb{N}^{*}$，$n>1$）
↪ ．\end{enumerate}\vfill\nextpage\section*{2024年广州市中学生数学与科学联赛（数学）
↪ 活动}\section*{增城区预赛二试试题}\setcounter{ex}{0}\ex \textbf{（本题满分40分）}如图，$I$是$\triangle ABC$的内心，
↪ $\angle A$的外角平分线交$BC$于点$D$，直线$BI$交$\triangle ABC$外接圆于点$E$，直线$CI$与直线$DE$交点为$F$.
↪ 证明：$AF\parallel BE$.
↪ \begin{figure}[h]\centering\begin{tikzpicture}\tkzDefPoints{1/2/A,0/0/B,-4/0/C}\tkzDefTriangleCenter[circum](A,B,C)\tkzGetP
↪ oint{O}\tkzDefTriangleCenter[in](A,B,C)\tkzGetPoint{I}\tkzDefTriangleCenter[ex](B,C,A)\tkzGetPoint{I_c}\tkzInterLL(A,I_c)(B
↪ ,C)\tkzGetPoint{D}\tkzInterLC(B,I)(O,A)\tkzGetSecondPoint{E}\tkzInterLL(C,I)(D,E)\tkzGetPoint{F}\tkzDrawSegments(A,B
↪ A,C C,D D,E B,E C,F A,F)\tkzDrawCircle(O,A)\tkzLabelPoints[right](A)\tkzLabelPoints[above](E)\tkzLabelPoints[below](I,B,
↪ C,D,F)\end{tikzpicture}\end{figure}\ex \textbf{（本题满分40分）}已知实数$a,b,c$均不等于$0$，且$a+b+c=m$，
↪ $a^{2}+b^{2}+c^{2}=\frac{m^{2}}{2}$，求$\frac{a(m-2a)^{2}+b(m-2b)^{2}+c(m-2c)^{2}}{abc}$的值.
```