2023 年马其顿数学奥林匹克

2023-04-10 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0af4f196fa3899a8

1.求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有：

$$xf(x+y)+yf(y-x)=f(x^2+y^2).$$

2.设 p,q 均为奇素数，a 为正整数，使得 $p\mid a^q+1$，$q\mid a^p+1$．求证：$p\mid a+1$ 或 $q\mid a+1$．

3.在一个地精之城中，有 1000 座塔，每座塔都有 1000 层，每一层中都住有 1 个地精．城市中的每个地精都戴着一顶帽子，同一座塔中的地精帽子颜色互不相同，帽子共有 1000 种可能的颜色．如果有两个帽子颜色相同的地精，一个住在第 k 层，另一个住在第 $k+1$ 层，则称他们是一对朋友．求朋友对的最大可能值．

4.设 $\triangle ABC$ 为不等边的锐角三角形，垂心为 H．以 A 为圆心，AH 的长度为半径的圆和 $\triangle BHC$ 的外接圆交于点 T_a（异于点 H），类似定义点 T_b,T_c．求证：点 H 在 $\triangle T_aT_bT_c$ 的外接圆上．

5.n 个男孩和 n 个女孩围坐在一个圆桌边，其中 $n>3$．在每一次操作中，可以交换两名相邻的孩子，以使得若干次操作后，每个孩子都至少有一个与自己性别相同的邻座．对每种初始状态，称这样的操作次数的最小值为它的**熵**．

对任意的初始状态，求熵的最大值．

以下为 tex（题号处有 AoPS 超链接）：

1.求所有函数 f：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有：$$xf(x+y)+yf(y-x)=f(x^2+y^2).$$ 2.设 p,q均为奇素数，a为正整数，使得 $p\mid a^{q}+1$，$q\mid a^{p}+1$．求证：$p\mid a+1$或 $q\mid a+1$．3.在一个地精之城中，有 1000座塔，每座塔都有 1000层，每一层中都住有 1个地精．城市中的每个地精都戴着一顶帽子，同一座塔中的地精帽子颜色互不相同，帽子共有 1000种可能的颜色．如果有两个帽子颜色相同的地精，一个住在第 k层，另一个住在第 $k+1$层，则称他们是一对朋友．求朋友对的最大可能值．4.设 $\triangle ABC$为不等边的锐角三角形，垂心为 H．以 A为圆心，AH的长度为半径的圆和 $\triangle BHC$的外接圆交于点 T_{a}（异于点 H），类似定义点 T_{b},T_{c}．求证：点 H在 $\triangle T_{a}T_{b}T_{c}$的外接圆上．5.$n$个男孩和 n个女孩围坐在一个圆桌边，其中 $n>3$．在每一次操作中，可以交换两名相邻的孩子，以使得若干次操作后，

每个孩子都至少有一个与自己性别相同的邻座．对每种初始状态，称这样的操作次数的最小值为它的**熵**．对任意的初始状态，求熵的最大值．

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{enumitem}
\usepackage{geometry}
\geometry{a6paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
%%% 适合手机阅读的 A6 版本
\usepackage{hyperref}
\begin{document}
\title{2023 年马其顿数学奥林匹克——中文翻译}
\author{程国根}
\maketitle
\newpage
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3049237p27469265}{\bf 1.}求所有函数$f$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，
↪ 使得对任意$x,y\in\mathbb{R}$，都有：$$xf(x+y)+yf(y-x) = f(x^2+y^2).$$
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3049239p27469279}{\bf 2.}设$p,q$均为奇素数，$a$为正整数，使得$p\mid
↪ a^{q}+1$，$q\mid a^{p}+1$．求证：$p\mid a+1$或$q\mid a+1$.
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3049242p27469295}{\bf 3.}在一个地精之城中，有$1000$座塔，
↪ 每座塔都有$1000$层，每一层中都住有$1$个地精．城市中的每个地精都戴着一顶帽子，同一座塔中的地精帽子颜色互不相同，
↪ 帽子共有$1000$种可能的颜色．如果有两个帽子颜色相同的地精，一个住在第$k$层，另一个住在第$k+1$层，
↪ 则称他们是一对朋友．求朋友对的最大可能值.
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3049245p27469314}{\bf 4.}设$\triangle ABC$为不等边的锐角三角形，
↪ 垂心为$H$．以$A$为圆心，$AH$的长度为半径的圆和$\triangle BHC$的外接圆交于点$T_{a}$（异于点$H$），
↪ 类似定义点$T_{b},T_{c}$．求证：点$H$在$\triangle T_{a}T_{b}T_{c}$的外接圆上.
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3049248p27469336}{\bf 5.}$n$个男孩和$n$个女孩围坐在一个圆桌边，
↪ 其中$n>3$．在每一次操作中，可以交换两名相邻的孩子，以使得若干次操作后，
↪ 每个孩子都至少有一个与自己性别相同的邻座．对每种初始状态，称这样的操作次数的最小值为它的\textbf{熵}.
对任意的初始状态，求熵的最大值.
\end{document}
```