以一道预赛题为例，谈谈猜取等条件的重要性

2024-02-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0b12a435ee1a9a53

来看一道预赛题：

已知正数 a,b,c 满足：$2a+4b+7c\le 2abc$，求 $a+b+c$ 的最小值.

先写个隐藏了思路的解答：

解答（PDF 中已展开）

解答：

设 $a=3x$，$b=\dfrac{5}{2}y$，$c=2z$，则条件变为：

$$2\cdot 3x+4\cdot\frac{5}{2}y+7\cdot 2z\le 2\cdot 3x\cdot\frac{5}{2}y\cdot 2z$$

即 $3x+5y+7z\le 15xyz$.

于是由 15 元均值不等式，有

$$15xyz\ge 3x+5y+7z\ge 15\sqrt[15]{x^3y^5z^7}$$

即 $x^6y^5z^4\ge 1$. 因此

$$a+b+c=\frac{6x+5y+4z}{2}\ge\frac{15\sqrt[15]{x^6y^5z^4}}{2}\ge\frac{15}{2}$$

$a=3$，$b=\dfrac{5}{2}$，$c=2$ 时，等号成立，于是 $a+b+c$ 的最小值为 $\dfrac{15}{2}$.

大家能否看出上面的过程是怎么得来的?

分析：

条件的不等式中，每个变量均为一次，因此可以轻松地进行消元.

由题意知：$(2ab-7)c\ge 2a+4b$，从而 $2ab-7\ge 0$，因此有 $c\ge\dfrac{2a+4b}{2ab-7}$.

代入 $a+b+c$ 后进行分离常数，使用均值不等式可以再消去一个变量.

$$\begin{aligned}
&a+b+c\\
\geq&a+b+\frac{2a+4b}{2ab-7}\\
=&a+b+\frac{(2a-\frac{7}{b})+(4b+\frac{7}{b})}{2ab-7}\\
=&a+b+\frac{1}{b}+\frac{4b+\frac{7}{b}}{2ab-7}\\
=&\frac{2ab-7}{2b}+\frac{7}{2b}+b+\frac{1}{b}+\frac{4b+\frac{7}{b}}{2ab-7}\\
\geq&2\sqrt{\frac{2ab-7}{2b}\cdot\frac{4b+\frac{7}{b}}{2ab-7}}+b+\frac{9}{2b}\\
=&\sqrt{\frac{8b^2+14}{b^2}}+b+\frac{9}{2b}
\end{aligned}$$

虽然转变成单变量问题了，但这个函数非常复杂，难以求出最小值.

尽管如此，上面的过程也能帮助我们探寻本题的取等条件：

$2a+4b+7c=2abc$

$\frac{2ab-7}{2b}=\frac{4b+\frac{7}{b}}{2ab-7}$ 即 $(2ab-7)^2=8b^2+14.$

仿照上面过程，以 b 为主元，同理可得另一个取等条件：（过程略）

$\frac{2ab-7}{2a}=\frac{2a+\frac{14}{a}}{2ab-7}$ 即 $(2ab-7)^2=4a^2+28.$

要根据上面三个方程严谨地解出 a,b,c 的值非常困难，但我们坚信，这类题目的取等条件往往不会太复杂，有极大的可能是整数.

另外观察到 $(2ab-7)^2=4a^2+28$ 这个式子中存在平方差的结构，将其当成关于 a,b 的不定方程，可以很快解出来.

$(2ab-7+2a)(2ab-7-2a)=28$，且 $2ab-7+2a$ 和 $2ab-7-2a$ 同奇偶，于是

$$\begin{cases}2ab-7+2a=14\\2ab-7-2a=2\end{cases}$$

解得：$a=3$，$b=\frac{5}{2}$，代入 $(2ab-7)^2=8b^2+14$，同样满足，于是 $c=2.$

猜到取等条件之后，为了方便凑均值，将 a,b,c 分别设为 $3x,\frac{5}{2}y,2z$，取等条件变为了 $x=y=z=1$，于是就得到上面的解答.

可以看出，如果没有猜出取等条件，本题将困难不少.

最后留个问题，大家能猜出取等条件，并依照取等条件做出题目吗?

非负实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=11$，则

$$(a+b+c+2)^2\left(\frac{1}{a^2+3}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+3}\right)$$

的最大值为 _____.