# 2024 年伊比利亚美洲大学数学竞赛

2024-10-24 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0b20f0dc7550b22d

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

## 2024 年伊比利亚美洲大学数学竞赛

程国根 译

## 第一天

**1.** 设 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 为实数列．函数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，且满足：

$$f_0(x)=1, f_n(x)=\int_{a_n}^{x} f_{n-1}(t)\mathrm{d}t, n\geq 1.$$

求所有可能的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$，使得对任意 $n\geq 2$，都有 $f_n(0)=0$．

**2.** 设 $n$ 为正整数，$M_n$ 为所有可逆的 $n\times n$ 整数矩阵构成的集合．

(1) 求 $n$ 的最大可能值，使得存在对称矩阵 $A\in M_n$，满足

$$\det(A^{20}+A^{24})<2024.$$

(2) 求证：对任意正整数 $n$，都存在矩阵 $B\in M_n$，满足

$$\det(B^{20}+B^{24})<2024.$$

**3.** 对正整数 $n$，设 $\varphi(n)$ 为欧拉函数．求所有正整数 $k$，使得存在正整数 $1\leq a_1<a_2<\cdots<a_k$，满足

$$\left\lfloor \frac{\varphi(a_1)}{a_1}+\frac{\varphi(a_2)}{a_2}+\cdots+\frac{\varphi(a_k)}{a_k}\right\rfloor=2024.$$

# 2024 年伊比利亚美洲大学数学竞赛

程国根　译

## 第二天

**4.** 给定坐标平面上两点 $O=(0,0)$，$A=(2024,-2024)$．对任意正整数 $n$，Damian 标记出所有整点 $B_{i,j}=(i,j)$，其中 $0\le i,j\le n$，并且计算每个 $\triangle OAB_{i,j}$ 的面积．设 $S(n)$ 为这 $(n+1)^2$ 个面积之和，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S(n)}{n^3}$．

**5.** 给定一个 $3\times N$ 的方格网，起初，每个小方格都涂为白色．设 $a(N)$ 为可涂为黑色的小方格的个数最大值，使得没有连续三个小方格（水平、竖直和对角线方向）均被涂为黑色．求证：$\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{a(N)}{N}$ 存在，并求出极限值．

**6.** 对实数 $x$，定义 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{n!\cdot x\}$，其中 $\{s\}=s-\lfloor s\rfloor$ 表示 $s$ 的小数部分．判断是否存在无理数 $x$，使得级数 $S(x)$ 收敛．