2023 年以色列数学奥林匹克

2022-12-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0b279a614b7a2925

1. 2000 人围坐在一张圆桌旁. 他们每个人要么是讲真话的人（总是讲真话），要么是撒谎的人（总是撒谎）. 每个人都说 “在我旁边右边的三个人中，至少有两个是骗子”. 这个圆桌边共有多少个讲真话的人?

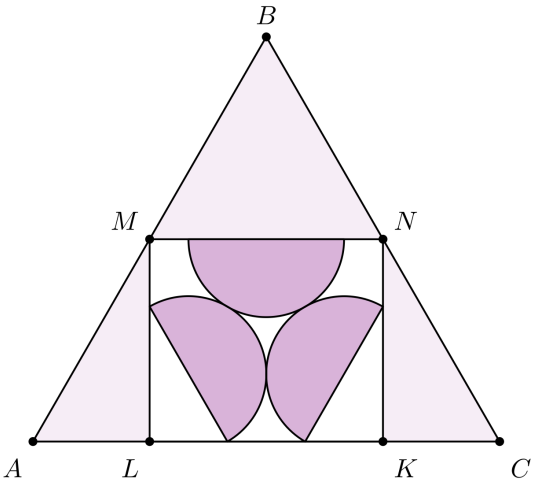
2. 非负整数 x,y 满足 $\sqrt{x}+\sqrt{x+60}=\sqrt{y}$. 求 x 的最大可能值.

3. 给定三角形 $\triangle ABC$ 和一个任意的圆 ω. 令 α 和 ω 关于点 A 对称，β 和 ω 关于点 B 对称，γ 和 ω 关于点 C 对称. 已知圆 α,β,γ 互不相交.
   设 P 为 β 和 γ 两条内公切线的交点. 同样地，Q 为 α 和 γ 两条内公切线的交点，R 是 α 和 β 两条内公切线的交点.
   证明：$\triangle PQR$ 和 $\triangle ABC$ 全等.

4. 对每个正整数 n，求所有三元实数组 (a,b,c)，使得

$$\begin{cases} a=b^n+c^n \\ b=c^n+a^n \\ c=a^n+b^b \end{cases}$$

1. 设 $\triangle ABC$ 为等边三角形，边长为 1. AB,BC 的中点分别为 M,N. 在 AC 上取点 K,L，使 $KLMN$ 为矩形. 在这个矩形内有三个半径相同的半圆，如图所示（端点在矩形的边缘上，圆弧相切）. 求半圆半径的最小可能值.



1. 是否存在一个由 5783 个不同实数组成的集合 S，满足以下条件：
   对于 S 中的任意 a,b（不一定不同），S 中都存在 $c \neq d$，使得 $a \cdot b = c + d$.

2. Ana 和 Banana 正在玩一个游戏. 起初，Ana 秘密地挑选了一个数字 $1 \leq A \leq 10^6$. 在接下来的每轮游戏中，Banana 可以挑选一个正整数 B，Ana 会向他透露积 $A \cdot B$ 中出现最多次的数码（用十进制符号书写）. 在至少有两个数码并列的情况下，Ana 将向 Banana 透露所有这些数码. 例如，如果 $A \cdot B = 2022$，Ana 会告诉 Banana，数码 2 出现了最多次，而如果 $A \cdot B = 5783783$，Ana 会说 3、7 和 8 均出现了最多次. Banana 的目标是在一定的回合数后确定数字 A. 他有获胜的策略吗?