ACGN 各一题

2023-07-12　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0b785bd4b69e4297

选了几道最近上课讲过的题目（ACGN 各一道），作为本期习题研讨的题目吧。

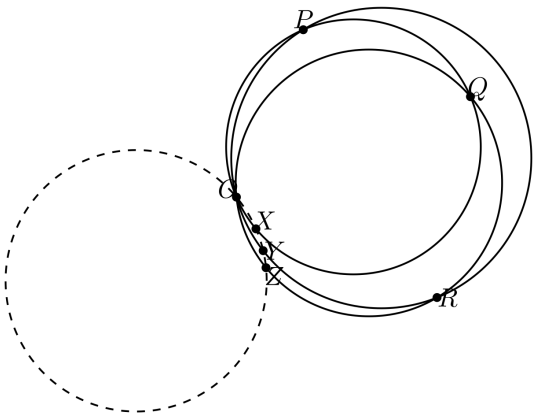
1. 给定素数 $p \equiv 7 \pmod 8$，正整数 m, n 满足 $\dfrac{m}{n} < \sqrt{p}$. 求证：$\dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{mn} < \sqrt{p}$.

2. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正实数，且满足 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k} = 1$. 求最大的实数 k_n，使得不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - n^3 \geq k \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j - n^3 (n-1) \right)$$

恒成立.

1. 如图，三圆均过点 O，且另外交于 P, Q, R 三点，X, Y, Z 分别为弧 QR, RP, PQ（均含点 O）的中点. 求证：O, X, Y, Z 四点共圆.



1. $\{1, 2, \cdots, 2023\}$ 的一个子集 M 满足：对任意 $a, b, c \in M$（a, b, c 可以相同），都有 $ab \neq c$. 求 $|M|$ 的最大值，并求出达到最大值时 M 的所有可能情况.