2022 年函数方程奥林匹克（SEIF）预选题

2022-03-27 原文链接

网站版本 3f6bf801342b · 文章 ID h_0baa9e03be550832

记号说明：

1. 本试题中，$\mathbb{N}$ 表示正整数集，$\mathbb{N}_0$ 则表示自然数集.
2. $f^m(n)$ 表示 $f(n)$ 的 m 次迭代，$f(n)^m$ 则表示 $f(n)$ 的 m 次方.
3. 对正整数 n，$[n]$ 表示集合 $\{1,2,\cdots,n\}$.

代数组

1. （第 1 天第 1 题）求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $x^3+f(x)f(y)=f(f(x^3)+f(xy))$.
2. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得存在 $k\in\mathbb{N}$，满足对于任意 $x,y\in\mathbb{N}$，都有 $\frac{f(x+y)+f(x)}{ky+f(x)}=\frac{kx+f(y)}{f(x+y)+f(y)}$.
3. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $f(xf(y))+xf(x-y)=x^2+f(2x)$.
4. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{N}$，都有 $f^{x+f(y)-y}(xy)=xf(y)+1$.
5. （第 2 天第 3 题）求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $f(x+yf(x))=f(xy+1)+f(x-y)$.

组合组

1. 求所有正整数 n，使得存在函数 $f\colon [n]\to[n]$，满足对任意 $i\in[n]$，都有 $|f(i)-if_i|=1$，其中 f_i 表示满足 $f(j)=i$ 的 $j\in[n]$.
2. （第 1 天第 2 题）定义集合 $2^{[n]}$ 为集合 $[n]$ 的子集构成的集合. 求所有函数 $f\colon 2^{[n]}\to 2^{[n]}$，满足对任意 $[n]$ 的子集 A 和 B，都有 $|A\cap f(B)|=|B\cap f(A)|$.
3. （第 2 天第 2 题）设 ϕ 为集合 $[n]$ 的一个排列. 称数对 (i,j) 为逆序的，如果 $i<j$，且 $\phi(i)>\phi(j)$. 设 I 为 ϕ 中逆序对的个数. 求证：$I\le\sum_{k=1}^{n}|k-\pi(k)|\le 2I$ 并求出等号成立条件.

数论组

1. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对任意正整数 m，n，都有 $f(m+n) \mid f(m)+f(n)$，且 $f(m)f(n) \mid f(mn)$.

2. (第 2 天第 1 题) 给定正整数 n. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对任意 $a,b \in \mathbb{N}$，都有 $a+f(b) \mid af(a^{n-1})+f(b)^n$.

3. 求所有函数 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，使得对任意整数 x，y，$f(x)f(y)+f(xy)+x+y$ 均为素数.

4. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$，同时满足如下条件：

   - $f(0)=0$；
   - 存在定值 η，使得对任意 $n \in \mathbb{N}_0$，都有 $f(n^{2022}) \leq n^{2022}+\eta$；
   - 对任意 a，b，$c \in \mathbb{N}_0$，$af^b(a)+bf^c(b)+cf^a(c)$ 均为完全平方数.

5. (第 1 天第 3 题) 求所有函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对任意 $m,n \in \mathbb{N}$，都有 $f^{f(m)}(n) \mid m+n+1$.