2022 年英国数学奥林匹克（第二轮）

2022-01-29　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0baf8691e2c5bbf7

英国数学奥林匹克（British Mathematical Olympiad，简称 BMO）是英国的数学竞赛，英国国际数学奥林匹克代表队选拔过程的一部分。比赛分两轮，称为 BMO1 和 BMO2。

第一轮一般在每年 12 月举行，第二轮在次年的一月底或二月初举行。两轮的考试时间均为 3.5 小时，第一轮共 6 题，第二轮共 4 题。

今年第一轮的试题翻译见：2021-2022 年英国数学奥林匹克（第一轮）——中文翻译。

1. 对给定的正整数 k，如果整数 n 同时满足如下两个条件，则称 n 为 k-数：

- n 能表示为两个相差 k 的整数之积；
- n 恰比某个完全平方数小 k. 求所有整数 k，使得存在无穷多个 k-数.

1. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$，使得对任意正整数 x，y，均有

$$2yf(f(x^2)+x) = f(x+1)f(2xy)$$

2. 将 n 副完全相同的牌组放入一些盒子中，每副牌组包含 50 张牌，标记为 1 到 50. 每个盒子中最多能放 2022 张牌. 如果一堆盒子中所包含的每种标记的牌总数相同，则称这堆盒子是规则的. 证明：存在正整数 N，对任意 $n \geq N$，都可以将所有盒子分成两个非空的规则堆.

3. 设锐角三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ. 过 B、C 分别作 BC 的垂线 l_B、l_C. 点 T 在劣弧 BC 上，过点 T 作 Γ 的切线和 l_B、l_C 分别交于点 P_B 和点 P_C. 过点 P_B 作 AC 的垂线，过点 P_C 作 AB 的垂线，两垂线交于点 Q. 若点 Q 在 BC 上，求证：AT 过点 Q.