数学竞赛每日一练第 10 期解答

2021-06-13 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0cbff0bde0b6708f

设 n 是大于 1 的偶数，整数 $1<a_1<a_2<\cdots<a_k<n$ 满足 $[a_i,a_j]>n$ 对所有 $1\leq i\neq j\leq k$ 成立. 证明

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}<\frac{3}{2}.$$

解答（PDF 中已展开）

证明

先证明一个**引理**：设

$$1\leq a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}\leq 2n$$

则有 $1\leq i<j\leq n+1$，使得 $a_i\mid a_j$.

引理的证明

反证法，若结论不成立，则对任意 $1\leq i<j\leq n+1$，有 a_j 不是 a_i 的倍数.

设 $a_i=b_i2^{n_i}$，其中 b_i 为奇数，n_i 为自然数，则 $b_i\neq b_j$ $(i\neq j)$. 但因为 b_i 只能取 1，3，5，$\cdot$，$2n-1$ 至多 n 个数，矛盾，故得证.

原命题的证明

我们计算这些数 a_1，a_2，$\cdots$，a_k 在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中倍数的个数. 对每个 $1\leq i\leq k$，a_i 的倍数个数是 $\left[\frac{n}{a_i}\right]$. 对任何 $1\leq i\neq j\leq k$，a_i 的此类倍数与 a_j 的此类倍数没有重复，因为它们至少是 $[a_i,a_j]>n$.

$\therefore a_1$，a_2，$\cdots$，a_k 的倍数总数为 $\sum\limits_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right]$.

$$\therefore n\geq\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right]>\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i}-k$$

即

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i}<k+n$$

欲证

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}<\frac{3}{2}$$

只需证

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i}<\frac{3}{2}n$$

只需证 $k_n\le\frac{3}{2}n$，即 $k\le\frac{n}{2}$.

若 $k>\frac{n}{2}$，由引理得，存在 $1\le i<j\le k$，使得 $a_i\mid a_j$，则 $[a_i,a_j]=a_j<n$，矛盾!

从而原命题获证.