2024 年 LMAO

2024-06-03 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0f876fc7ee985ca6

2024 年 LMAO

第一天

1. 记 $\mathbb{S}$ 为正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 的所有非空子集组成的集合. 求所有映射 $f:\mathbb{S}\to\mathbb{Z}_+$，满足以下条件：

(1) 对任意 $A,B\in\mathbb{S}$，有 $f(A\cap B)=\min(f(A),f(B))$；

(2) 对任意正整数 n，有 $\sum\limits_{X\subseteq[1,n]} f(X)=2^{n+1}-1$.

2. 一场马戏表演由两两不同高度的竹棍组成，竹棍按某种顺序摆放，其中一根竹棍上站着一只猴子。然后，马戏团团长可以向猴子发出以下命令：

- 左!：接到这个命令后，猴子会找到离左边最近的、比它当前所在的竹棍高的竹棍，然后跳上去。如果没有这样的竹棍，猴子就会待在原地。
- 右!：接到这个命令后，猴子会找到离右边最近的、比它当前所在的竹棍高的竹棍，然后跳上去。如果没有这样的竹棍，猴子就会待在原地。

马戏团团长声称，给定任意两根竹棍，如果猴子最初站在较短的竹棍上，那么在发出最多 c 个命令后，他可以让猴子站在较高的竹棍上。c 的最小可能值是多少?

3. 假设 Δ_0 是一个等边三角形，其内切圆为 ω. 将 ω 上任意一点关于 Δ_0 的三边对称，得到一个新的三角形 Δ_1. 然后同样将该点关于 Δ_1 的三边对称，得到另一个三角形 Δ_2. 求证：Δ_2 的外接圆与 ω 相切.

2024 年 LMAO

第二天

4. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，$\angle BAC = 60°$．$\angle BAC$ 的内角平分线分别与直线 BC 和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 M, L．设 K 为 $BL \cap AC$ 关于直线 BC 的对称点．点 D 在直线 CO 上，满足 $DM \perp KL$．求证：K, A, D 三点共线．

5. 求证：存在函数 $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$，同时满足如下条件：

(1) 对任意正整数 m, n，都有 $\gcd(|f(m) - f(n)|, f(mn)) = f(\gcd(m, n))$；

(2) 对任意正整数 m，都有 $f(f(m)) = f(m)$；

(3) 对任意正整数 k，存在正整数 n，使得 $2024^k \mid f(n)$．

6. 平面上有 $n > 1$ 个不同的标记点．求证：存在一组圆 $\mathcal{C}$，使得

- $\mathcal{C}$ 中的每个圆半径均为 1；
- 每个标记点都位于 $\mathcal{C}$ 中某个圆的内部（不含边界）；
- $\mathcal{C}$ 中有少于 $0.3n$ 对圆相交（有两个不同交点）．

注：将 $0.3n$ 替换为 cn 的较弱结果可能会根据常数 $c > 0.3$ 的值获得部分分数．

2024 年 LMAO

第一天

1. 记 $\mathbb{S}$为正整数集 $\mathbb{Z}_{+}$的所有非空子集组成的集合. 求所有映射 $f:\mathbb{S}\to\mathbb{Z}_{+}$，满足以下条件：

1. 对任意 $A,B\in\mathbb{S}$，有 $f(A \cap B) = \text{min}(f(A), f(B))$；
2. 对任意正整数 n，有 $\sum \limits_{X \subseteq [1, n]}f(X) = 2^{n+1}-1$.

2. 一场马戏表演由两两不同高度的竹棍组成，竹棍按某种顺序摆放，其中一根竹棍上站着一只猴子。然后，马戏团团长可以向猴子发出以下命令：

- 左!：接到这个命令后，猴子会找到离左边最近的、比它当前所在的竹棍高的竹棍，然后跳上去。如果没有这样的竹棍，猴子就会待在原地。

- 右!：接到这个命令后，猴子会找到离右边最近的、比它当前所在的竹棍高的竹棍，然后跳上去。如果没有这样的竹棍，猴子就会待在原地。

马戏团团长声称，给定任意两根竹棍，如果猴子最初站在较短的竹棍上，那么在发出最多 c个命令后，他可以让猴子站在较高的竹棍上。c的最小可能值是多少?

3. 假设 Δ_0是一个等边三角形，其内切圆为 ω. 将 ω上任意一点关于 Δ_0的三边对称，得到一个新的三角形 Δ_1. 然后同样将该点关于 Δ_1的三边对称，得到另一个三角形 Δ_2. 求证：Δ_2的外接圆与 ω相切.

2024 年 LMAO

第二天

4. 设 $\triangle ABC$的外心为 O，$\angle BAC = 60^{\circ}$. $\angle BAC$的内角平分线分别与直线 BC和 $\triangle ABC$的外接圆相交于点 M,L. 设 K为 $BL\cap AC$关于直线 BC的对称点. 点 D在直线 CO上，满足 $DM\perp KL$. 求证：K,A,D三点共线.

5. 求证：存在函数 $f:\mathbb{N}_{+}\to\mathbb{N}_{+}$，同时满足如下条件：

1. 对任意正整数 m,n，都有 $\gcd(|f(m)-f(n)|, f(mn)) = f(\gcd(m, n))$；
2. 对任意正整数 m，都有 $f(f(m))=f(m)$；
3. 对任意正整数 k，存在正整数 n，使得 $2024^{k}\mid f(n)$.

6. 平面上有 $n > 1$个不同的标记点. 求证：存在一组圆 $\mathcal C$，使得

- $\mathcal C$中的每个圆半径均为 1；
- 每个标记点都位于 $\mathcal C$中某个圆的内部（不含边界）；
- $\mathcal C$中有少于 $0.3n$对圆相交（有两个不同交点）.

注：将 $\it{0.3n}$替换为 $\it{cn}$的较弱结果可能会根据常数 $\it{c > 0.3}$的值获得部分分数.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年LMAO}\section*{第一天}\ex 记$\mathbb{S}$为正整数集$\mathbb{Z}_{+}$的所有非空子集组成的集合.
↪ 求所有映射$f:\mathbb{S}\to\mathbb{Z}_{+}$，满足以下条件：\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item
↪ 对任意$A,B\in\mathbb{S}$，有$f(A \cap B) = \text{min}(f(A), f(B))$；\item 对任意正整数$n$，有$\sum \limits_{X \subseteq [1,
↪ n]}f(X) = 2^{n+1}-1$. \end{enumerate}\vfill\ex 一场马戏表演由两两不同高度的竹棍组成，竹棍按某种顺序摆放，
↪ 其中一根竹棍上站着一只猴子。然后，马戏团团长可以向猴子发出以下命令：\begin{itemize}\item 左！：接到这个命令后，
↪ 猴子会找到离左边最近的、比它当前所在的竹棍高的竹棍，然后跳上去。如果没有这样的竹棍，猴子就会待在原地。\item 右！：
↪ 接到这个命令后，猴子会找到离右边最近的、比它当前所在的竹棍高的竹棍，然后跳上去。如果没有这样的竹棍，
↪ 猴子就会待在原地。\end{itemize}
```

马戏团团长声称，给定任意两根竹棍，如果猴子最初站在较短的竹棍上，那么在发出最多c个命令后，
↪ 他可以让猴子站在较高的竹棍上。c的最小可能值是多少？\vfill\ex 假设Δ_0是一个等边三角形，其内切圆为ω.
↪ 将ω上任意一点关于Δ_0的三边对称，得到一个新的三角形 Δ_1.
↪ 然后同样将该点关于Δ_1的三边对称，得到另一个三角形Δ_2. 求证：Δ_2的外接圆与ω相切.
↪ \vfill\nextpage\section*{2024年LMAO}\section*{第二天}\ex 设$\triangle ABC$的外心为O，$\angle BAC = 60^{\circ}$.
↪ $\angle BAC$的内角平分线分别与直线BC和$\triangle ABC$的外接圆相交于点M,L. 设K为$BL\cap
↪ AC$关于直线$BC$的对称点. 点$D$在直线$CO$上，满足$DM\perp KL$. 求证：$K,A,D$三点共线. \vfill\ex 求证：
↪ 存在函数$f:\mathbb{N}_{+}\to\mathbb{N}_{+}$，同时满足如下条件：\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item
↪ 对任意正整数m,n，都有$\gcd(|f(m)-f(n)|, f(mn)) = f(\gcd(m, n))$；\item 对任意正整数$m$，都有$f(f(m))=f(m)$；\item
↪ 对任意正整数k，存在正整数n，使得$2024^{k}\mid f(n)$. \end{enumerate}\vfill\ex 平面上有$n > 1$个不同的标记点. 求证：
↪ 存在一组圆$\mathcal C$，使得\begin{itemize}\item $\mathcal C$中的每个圆半径均为1；\item 每个标记点都位于$\mathcal
↪ C$中某个圆的内部（不含边界）；\item $\mathcal C$中有少于$0.3n$对圆相交（有两个不同交点）. \end{itemize}
注：将 $\it{0.3n}$ 替换为 $\it{cn}$ 的较弱结果可能会根据常数 $\it{c > 0.3}$ 的值获得部分分数. \vfill