2022 年德国数学奥林匹克（十二年级组）

2022-06-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0fe755cd7d121018

第一天

1. 求所有实数 a，使得方程组

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2+2z^2=a \\ 4x^2+4y^2+5z^2=1-a \end{cases}$$

至少有一组实数解 (x,y,z).

在平面王国中，生活着热爱平面测量高于所有其它学科的人们．因此，他们将自己国家的土地看作是平坦的，每个城市都被看作一个几何点，每条道路都是连接两点的一条线段．
除了现有城市外，还可以建造环形交叉路口，它们是道路网络中两条或多条道路的起点．所有道路的交叉处以及连接处都会建造环形交叉路口．这个道路网络将任意两个城市通过一系列道路和可能通过的环形交叉路口都连接了起来．在平面王国中，道路的长度为相应线段的几何长度．
独具匠心的道路工程师 Armin Asphalt 提出了一个新的道路规划，据此可知，没有比该规划道路总长度更小的道路网络，也没有计划具有相同的道路总长度和更少的环岛．
证明：在 Armin Asphalt 的规划中，从每个城市出发最多有三条道路，每个环岛处恰有三条道路．

在 $\triangle ABC$ 中，M 和 N 分别为 BC 和 AC 的中点．点 Q 在过点 N 且平行于 BC 的直线上，且和点 C 位于直线 AB 异侧，满足 $QN\cdot BC=AB\cdot AC$.
设 $\triangle AQN$ 的外接圆和线段 MN 再次交于点 T（$T\neq N$）.
求证：存在一个过点 T 和点 N 的圆，同时和边 BC、$\triangle ABC$ 的内切圆相切.

第二天

1. 求不定方程

$$x^3+7y^3+49z^3=2u^3+14v^3+98w^3$$

的整数解 (x,y,z,u,v,w).

等边三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆为 k．在 k 的劣弧 AB 上取一点 D，圆 q 和圆 k 外切于点 D．过 A，B，C 三点分别作圆 q 的切线，设切线长分别为 a，b，c．求证：$a+b=c$.

函数 f 满足以下四个条件：
(1)f 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数；
(2) 对任意实数 x，y，都有 $f(xy)=f(x)f(y)$；

(3) 对任意实数 x，y，都有 $f(x+y) \leq 2(f(x)+f(y))$；

(4)$f(2)=4$.

求证：

(1) 存在满足条件的函数 f，使得 $f(3)=9$.

(2) 对任意满足条件的函数 f，都有 $f(3) \leq 9$.

2022 年德国数学奥林匹克 (十二年级组)——中文翻译

点击阅读原文可查看官方试题及答案