Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题

2023-07-16 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_0ffdbad23a4a944c

1

Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题

Junior Problems

程国根 译

J631. 求最小的正整数 n，使得 $n^4-2023n^2+1$ 是两个素数的乘积.

J632. 设 a,b,c 为正实数，且 $a+b+c=3$. 求证：

$$\frac{1}{a(b+c)^5}+\frac{1}{b(c+a)^5}+\frac{1}{c(a+b)^5}\geq\frac{5}{32}.$$

J633. 设 a,b,c,t 为正实数，$t\geq 1$. 求证：

$$\frac{ta^3+a^2b}{a+b}+\frac{tb^3+b^2c}{b+c}+\frac{tc^3+c^2a}{c+a}\geq\frac{t+1}{2}(ab+bc+ca).$$

J634. 求证：对每个正整数 n，方程 $x^2+xy+y^2=(xy)^n$ 都没有除 $(0,0)$ 外的整数解 (x,y).

J635. 正实数 a,b,c 满足 $a^4-23a^2+1=0, b^4-23b^2+1=0, c^4-23c^2+1=0$. 求证：存在整数 n，使得

$$a^2b^2c^2-nabc+1=(ab+1)(bc+1)(ca+1).$$

J636. 正实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=3$. 求证：

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\leq\frac{a+b+c}{2}.$$

Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题

Senior Problems

程国根　译

S631. 求所有正整数 n，使得 $(n-1)!+(n+1)^2=(n^2-41)(n^2+49)$.

S632. 求如下方程组的实数解：

$$\begin{cases} 238^x+2016^y=2030^z \\ 238^y+2016^z=2030^x \\ 238^z+2016^x=2030^y \end{cases}.$$

S633. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$CD=CB$，$\angle BCD=180^\circ-2\angle BAD$. 点 A 在 BD 上的射影为 E，点 E 在 AD、AB 上的射影分别为 F 和 K. 设 O 为线段 AE 的中点，X 为 AC 和 FK 的交点. 求证：$OX=AO\cos\angle BAD$.

S634. 求证：不存在整数 a，b，c，使得

$$a^3-b^2-c^2+abc=5.$$

S635. 求所有有理数 x，使得

$$x^3-[x]^3-\{x\}^3=\frac{162}{5}.$$

其中 $[x]$ 和 $\{x\}$ 分别为 x 的整数部分和小数部分.

S636. 求证：对任意素数 p，$7^p+13^p+2023^p$ 的数码和都不是素数.

Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题

Undergraduate Problems

程国根　译

U631. 计算：

$$\int_2^3 \frac{(x^2+2)\sqrt{x^4-x^2+4}}{x^3}\mathrm{d}x.$$

U632. 设 $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. 计算：

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n(n+1)}.$$

U633. 计算：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt[3]{n}\cdot\ln(n+3)}{\sum\limits_{1\le i<j\le n}\dfrac{1}{ij}}$$

U634. 设点 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 在单位圆上. 求证：单位圆上存在一点 P，使得

$$PA_1+PA_2+\cdots+PA_n\ge\frac{4n}{\pi}.$$

U635. 计算：

$$\int_0^1\frac{\sin x\sin\pi x}{\cos\dfrac{2x-1}{2}}\mathrm{d}x.$$

U636. 计算：

$$\iiint_D e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\frac{zy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{(\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-1)^3}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

其中 $D=\{(x,y,z)\mid(z-1)^2+y^2+x^2\le1\}$.

Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题

Olympiad Problems

程国根　译

O631. 设正实数 x，y，z 满足 $x+y+z=3$．求证：

$$\frac{x}{4y^2+yz+4z^2}+\frac{y}{4z^2+zx+x^2}+\frac{z}{4x^2+xy+y^2}\geq\frac{1}{45}+\frac{14(xy+yz+zx)}{135}.$$

O632. 求满足以下条件的正整数 $n\geq 8$ 的最大值：能将 $n\times n$ 方格网中的 64 个单元格进行标记，使得每个 2×3 或 3×2 的矩形均至少覆盖一个被标记的单元格．

O633. 设 $ABCDEF$ 和 $A'B'C'D'E'F'$ 均为正六边形，且边长相等．设 $AA'\cap BB'=X$，$DD'\cap EE'=Y$，$CC'\cap FF'=Z$．求证：X，Y，Z 三点共线．

O634. 设正整数 $200<a_1<a_2<\cdots<a_n$ 满足：对任意正整数 d，至多存在 $d-1$ 个连续项，它们以 d 为公差成等差数列．求证：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq\frac{1}{2}.$$

O635. 正实数 a，b，c 满足 $a+b+c=3$．求证：

$$\frac{128(ab+bc+ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{81}{abc}\geq 225.$$

O636. 求证：不存在非零的实系数多项式 $P(x)$，使得对任意满足 $a^4+b^4+c^4=2$ 的实数 a，b，c，都有

$$P(-a+b+c)+P(a-b+c)+P(a+b-c)=0.$$

LaTeX 文稿分享:

Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题

Junior Problems

程国根　译

J631. 求最小的正整数 n，使得 $n^{4}-2023n^{2}+1$是两个素数的乘积.

J632. 设 a,b,c为正实数，且 $a+b+c=3$. 求证：$$\frac{1}{a(b+c)^{5}}+\frac{1}{b(c+a)^{5}}+\frac{1}{c(a+b)^{5}}\ge\frac{5}{32}.$$

J633. 设 a,b,c,t为正实数，$t\ge 1$. 求证：$$\frac{ta^{3}+a^{2}b}{a+b}+\frac{tb^{3}+b^{2}c}{b+c}+\frac{tc^{3}+c^{2}a}{c+a}\ge\frac{t+1}{2}(ab+bc+ca).$$

J634. 求证：对每个正整数 n，方程 $x^{2}+xy+y^{2}=(xy)^{n}$都没有除 $(0,0)$外的整数解 (x,y).

J635. 正实数 a,b,c满足 $a^{4}-23a^{2}+1=0$, $b^{4}-23b^{2}+1=0$, $c^{4}-23c^{2}+1=0$. 求证：存在整数 n，使得 $$a^{2}b^{2}c^{2}-nabc+1=(ab+1)(bc+1)(ca+1).$$

J636. 正实数 a,b,c满足 $ab+bc+ca=3$. 求证：$$\frac{1}{a^{2}+1}+\frac{1}{b^{2}+1}+\frac{1}{c^{2}+1}\le\frac{a+b+c}{2}.$$

Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题

Senior Problems

程国根　译

S631. 求所有正整数 n，使得 $(n-1)!+(n+1)^{2}=(n^{2}-41)(n^{2}+49)$.

S632. 求如下方程组的实数解：$$\begin{cases}238^{x}+2016^{y}=2030^{z}\\238^{y}+2016^{z}=2030^{x}\\238^{z}+2016^{x}=2030^{y}\end{cases}.$$

S633. 在凸四边形 $ABCD$中，$CD=CB$，$\angle BCD=180^{\circ}-2\angle BAD$. 点 A在 BD上的射影为 E，点 E在 AD、AB上的射影分别为 F和 K. 设 O为线段 AE的中点，X为 AC和 FK的交点. 求证：$OX=AO\cos\angle BAD$.

S634. 求证：不存在整数 a，b，c，使得 $$a^{3}-b^{2}-c^{2}+abc=5.$$

S635. 求所有有理数 x，使得 $$x^{3}-[x]^{3}-\{x\}^{3}=\frac{162}{5}.$$ 其中 $[x]$和 $\{x\}$分别为 x的整数部分和小数部分.

S636. 求证：对任意素数 p，$7^{p}+13^{p}+2023^{p}$的数码和都不是素数.

Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题

Undergraduate Problems

程国根　译

U631. 计算：$$\int_{2}^{3}\frac{(x^{2}+2)\sqrt{x^{4}-x^{2}+4}}{x^{3}}\mathrm{d}x.$$

U632. 设 $H_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. 计算：$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n(n+1)}.$$

U633. 计算：$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt[3]{n}\cdot\ln(n+3)}{\sum\limits_{1\le i< j\le n}\dfrac{1}{ij}}$$

U634. 设点 A_{1}，A_{2}，$\cdots$，A_{n}在单位圆上. 求证：单位圆上存在一点 P，使得 $$PA_{1}+PA_{2}+\cdots+PA_{n}\ge\frac{4n}{\pi}.$$

U635. 计算：$$\int_{0}^{1}\frac{\sin x\sin\pi x}{\cos\dfrac{2x-1}{2}}\mathrm{d}x.$$

U636. 计算：$$\iiint\limits_{D}e^{\frac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}{2}}\frac{zy^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}}\frac{(\frac{1}{2}(x^{2}+y^{2}+z^{2})-1)^{3}}{\sqrt{4-x^{2}-y^{2}-z^{2}}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}},$$ 其中 $D=\{(x,y,z)\mid (z-1)^{2}+y^{2}+x^{2}\le 1\}$.

Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题

Olympiad Problems

程国根　译

O631. 设正实数 x，y，z满足 $x+y+z=3$. 求证：$$\frac{x}{4y^{2}+yz+4z^{2}}+\frac{y}{4z^{2}+zx+x^{2}}+\frac{z}{4x^{2}+xy+y^{2}}\ge\frac{1}{45}+\frac{14(xy+yz+zx)}{135}.$$

O632. 求满足以下条件的正整数 $n\ge 8$的最大值：能将 $n\times n$方格网中的 64个单元格进行标记，使得每个 2×3或 3×2的矩形均至少覆盖一个被标记的单元格.

O633. 设 $ABCDEF$和 $A'B'C'D'E'F'$均为正六边形，且边长相等. 设 $AA'\cap BB'=X$，$DD'\cap EE'=Y$，$CC'\cap FF'=Z$. 求证：X，Y，Z三点共线.

O634. 设正整数 $200<a_{1}<a_{2}<\cdots<a_{n}$满足：对任意正整数 d，至多存在 $d-1$个连续项，它们以 d为公差成等差数列. 求证：$$\frac{1}{a_{1}}+\frac{1}{a_{2}}+\cdots+\frac{1}{a_{n}}\le\frac{1}{2}.$$

O635. 正实数 a，b，c满足 $a+b+c=3$. 求证：$$\frac{128(ab+bc+ca)^{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{81}{abc}\ge 225.$$

O636. 求证：不存在非零的实系数多项式 $P(x)$，使得对任意满足 $a^{4}+b^{4}+c^{4}=2$的实数 a，b，c，都有 $$P(-a+b+c)+P(a-b+c)+P(a+b-c)=0.$$

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}\usepackage{amsfonts}\usepackage{amsmath}\usepackage{enumitem}\usepackage{geometry}\usepac
↪ kage{setspace}\geometry{a5paper,left=1cm,right=1cm,top=2cm,bottom=2cm}\usepackage{hyperref}\begin{document}\begi
↪ n{spacing}{1.2}\section*{Mathematical Reflections 2023年第四期征解题}
\section*{Junior Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf J631.} 求最小的正整数 $n$，使得 $n^{4}-2023n^{2}+1$ 是两个素数的乘积. \vfill
{\bf J632.} 设 $a,b,c$ 为正实数，且 $a+b+c=3$. 求证：
$$\frac{1}{a(b+c)^{5}}+\frac{1}{b(c+a)^{5}}+\frac{1}{c(a+b)^{5}}\ge\frac{5}{32}.$$\vfill
{\bf J633.}设$a,b,c,t$为正实数，$t\ge 1$. 求证：
↪ $$\frac{ta^{3}+a^{2}b}{a+b}+\frac{tb^{3}+b^{2}c}{b+c}+\frac{tc^{3}+c^{2}a}{c+a}\ge\frac{t+1}{2}(ab+bc+ca).$$\vfill
{\bf J634.} 求证：对每个正整数 $n$，方程 $x^{2}+xy+y^{2}=(xy)^{n}$ 都没有除 $(0,0)$ 外的整数解 $(x,y)$. \vfill
{\bf J635.}正实数$a,b,c$满足$a^{4}-23a^{2}+1=0$，$b^{4}-23b^{2}+1=0$，$c^{4}-23c^{2}+1=0$. 求证：存在整数$n$，
↪ 使得$$a^{2}b^{2}c^{2}-nabc+1=(ab+1)(bc+1)(ca+1).$$\vfill
{\bf J636.}正实数$a,b,c$满足$ab+bc+ca=3$. 求证：
↪ $$\frac{1}{a^{2}+1}+\frac{1}{b^{2}+1}+\frac{1}{c^{2}+1}\le\frac{a+b+c}{2}.$$\vfill\newpage\section*{Mathematical Reflections
↪ 2023年第四期征解题}
\section*{Senior Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf S631.} 求所有正整数 $n$，使得 $(n-1)!+(n+1)^{2}=(n^{2}-41)(n^{2}+49)$. \vfill
{\bf S632.}求如下方程组的实数解：
↪ $$\begin{cases}238^{x}+2016^{y}=2030^{z}\\238^{y}+2016^{z}=2030^{x}\\238^{z}+2016^{x}=2030^{y}\end{cases}.$$\vfill
{\bf S633.}在凸四边形$ABCD$中，$CD=CB$，$\angle BCD=180^{\circ}-2\angle BAD$. 点$A$在$BD$上的射影为$E$，
↪ 点$E$在$AD$、$AB$上的射影分别为$F$和$K$. 设$O$为线段$AE$的中点，$X$为$AC$和$FK$的交点. 求证：
↪ $OX=AO\cos\angle BAD$. \vfill
{\bf S634.} 求证：不存在整数 $a$，$b$，$c$，使得 $$a^{3}-b^{2}-c^{2}+abc=5.$$\vfill
{\bf S635.} 求所有有理数 $x$，使得 $$x^{3}-[x]^{3}-\{x\}^{3}=\frac{162}{5}.$$
```

其中 $[x]$ 和 $\{x\}$ 分别为 x 的整数部分和小数部分. \vfill
{\bf S636.}求证：对任意素数p，$7^{p}+13^{p}+2023^{p}$的数码和都不是素数. \vfill\newpage\section*{Mathematical
↪ Reflections 2023年第四期征解题}
\section*{Undergraduate Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf U631.} 计算：$$\int_{2}^{3}\frac{(x^{2}+2)\sqrt{x^{4}-x^{2}+4}}{x^{3}}\mathrm{d}x.$$\vfill
{\bf U632.} 设 $H_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. 计算：$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n(n+1)}.$$\vfill
{\bf U633.} 计算：$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt[3]{n}\cdot \ln(n+3)}{\sum\limits_{1\le i< j\le n}\dfrac{1}{ij}}$$\vfill
{\bf U634.}设点A_{1}，A_{2}，$\cdots$，A_{n}在单位圆上. 求证：单位圆上存在一点P，
↪ 使得$$PA_{1}+PA_{2}+\cdots+PA_{n}\ge\frac{4n}{\pi}.$$\vfill
{\bf U635.} 计算：$$\int_{0}^{1}\frac{\sin x\sin\pi x}{\cos\dfrac{2x-1}{2}}\mathrm{d}x.$$\vfill
{\bf U636.}计算：
↪ $$\iiint\limits_{D}e^{\frac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}{2}}\frac{zy^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}}\frac{(\frac{1}{2}(x^{2}+y^{2}+z^{2})
↪ -1)^{3}}{\sqrt{4-x^{2}-y^{2}-z^{2}}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}},$$
其中 $D=\{(x,y,z)\mid (z-1)^{2}+y^{2}+x^{2}\le 1\}$. \vfill\newpage\section*{Mathematical Reflections 2023 年第四期征解题}
\section*{Olympiad Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf O631.}设正实数x，y，z满足$x+y+z=3$. 求证：$$\frac{x}{4y^{2}+yz+4z^{2}}+\frac{y}{4z^{2}+zx+x^{2}}+\frac{z}{4x^{」
↪ 2}+xy+y^{2}}\ge\frac{1}{45}+\frac{14(xy+yz+zx)}{135}.$$\vfill
{\bf O632.}求满足以下条件的正整数$n\ge 8$的最大值：能将$n\times n$方格网中的64个单元格进行标记，使得每个$2\times
↪ 3$或$3\times 2$的矩形均至少覆盖一个被标记的单元格. \vfill
{\bf O633.}设$ABCDEF$和$A'B'C'D'E'F'$均为正六边形，且边长相等. 设$AA'\cap BB'=X$，$DD'\cap EE'=Y$，$CC'\cap FF'=Z$.
↪ 求证：X，Y，Z三点共线. \vfill
{\bf O634.}设正整数$200<a_{1}<a_{2}<\cdots<a_{n}$满足：对任意正整数$d$，至多存在$d-1$个连续项，
↪ 它们以d为公差成等差数列. 求证：$$\frac{1}{a_{1}}+\frac{1}{a_{2}}+\cdots+\frac{1}{a_{n}}\le\frac{1}{2}.$$\vfill
{\bf O635.}正实数a，b，c满足$a+b+c=3$. 求证：$$\frac{128(ab+bc+ca)^{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{81}{abc}\ge
↪ 225.$$\vfill
{\bf O636.}求证：不存在非零的实系数多项式$P(x)$，使得对任意满足$a^{4}+b^{4}+c^{4}=2$的实数a，b，c，
↪ 都有$$P(-a+b+c)+P(a-b+c)+P(a+b-c)=0.$$\vfill
\end{spacing}\end{document}