解高航老师分享的一道题

2023-10-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1099ba1302c9d302

题目：

已知 $a,b\in\mathbb{R}$，设 $f(x)=x^4-2023x$，若 $a\neq b$，且

$$f(a)=f(b)=c(c>0),$$

求证：$-\sqrt{c}<ab<0.$

解答（PDF 中已展开）

证明：

由 $f'(x)=4x^3-2023=0$ 有唯一实根 x_0，知 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，且 $f(0)=f(\sqrt[3]{2023})=0$，于是 $f(x)=c$ 恰有两个实根 a,b，且 a,b 异号，因此 $ab<0$.

由因式定理，可设

$$x^4-2023x-c=(x-a)(x-b)(x^2+mx+n)$$

对比三次项系数及常数项可知：

$$m=a+b,n=-\frac{c}{ab}$$

对比二次项系数可知：

$$-\frac{c}{ab}+ab-(a+b)^2=0$$

即

$$c=a^2b^2-ab(a+b)^2>a^2b^2$$

又 $ab<0$，因此 $-\sqrt{c}<ab<0$，证毕.