2023 年第 35 届美国数学人才选拔（第一轮）

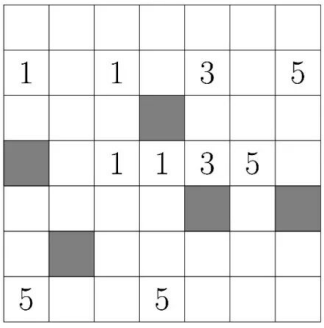
2023-10-24　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_109ec75af39feefe

2023 年第 35 届美国数学人才选拔（第一轮）

程国根　译

1. 将 $1,3,5$ 填入下表中的每一个非阴影方格内，使得对于每个方格，在与其相邻所有方格中，恰有一个所写数字和该方格相同．这里的“相邻方格”包括只共用一个点的方格，即对角相邻的方格．



注：本题有唯一的答案，但你只需要给出一个构造而无需证明．

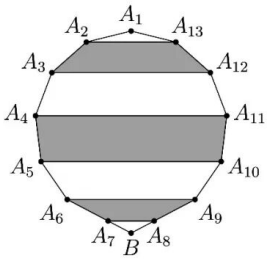
2. 将 101 个正整数按照一定顺序排列成一个 404 位数：$2024, 2025, 2026, \cdots, 2124$．这个 404 位数是否有可能为素数？

3. 设正整数 $n \geq 2$，高度分别为 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 座建筑排列在一条街道上．如果两座不同的建筑之间的所有建筑都比这两座建筑矮，则称这两座建筑是**屋顶友好的**．例如：建筑的高度依次为 $5, 3, 6, 2, 1, 4$，则其中有 8 对**屋顶友好的**建筑：$(5, 3)$，$(5, 6)$，$(3, 6)$，$(6, 2)$，$(6, 4)$，$(2, 1)$，$(2, 4)$，$(1, 4)$．用 n 表示**屋顶友好的**建筑对数的最大和最小可能值，并进行证明．

4. 求证：对任意满足 $1 \leq \sqrt{x} \leq y \leq x^2$ 的实数 x, y，如下关于 a, b, c 的方程组都有实数解：

$$\begin{cases} a+b+c = \dfrac{x+x^2+x^4+y+y^2+y^4}{2} \\ ab+ac+bc = \dfrac{x^3+x^5+x^6+y^3+y^5+y^6}{2} \\ abc = \dfrac{x^7+y^7}{2} \end{cases}$$

5. 在正十三边形 $A_1A_2\cdots A_{13}$ 中，直线 A_6A_7 和 A_8A_9 交于点 B．求证：阴影部分面积是总面积（包含 $\triangle A_7A_8B$）的一半．



2

第一题图 asy 代码：

```
\begin{asy}unitsize(1.2cm);defaultpen(fontsize(30pt));for(int i=0; i<8;
↪  ++i){draw((i,0)--(i,7));draw((0,i)--(7,i));}filldraw((0,4)--(1,4)--(1,3)--(0,3)--cycle, gray);filldraw((1,1)--(1,2)--(2,2)--(2,1)--cycle,
↪  gray);filldraw((4,2)--(4,3)--(5,3)--(5,2)--cycle, gray);filldraw((3,4)--(4,4)--(4,5)--(3,5)--cycle,
↪  gray);filldraw((6,2)--(6,3)--(7,3)--(7,2)--cycle, gray);
int[][] numbers = {{0,0,0,0,0,0,0},{1,0,1,0,3,0,5},{0,0,0,0,0,0,0},{0,0,1,1,3,5,0},{0,0,0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0,0,0},{5,0,0,5,0,0,0}};
for(int i=0; i<7; ++i){for(int j=0; j<7; ++j){if(numbers[i][j]>0){label(string(numbers[i][j]),(j+0.5,6.5-i));}}}\end{asy}
```

第 5 题图 asy 代码：

```
\begin{asy}size(2inch);
pair get_point(int ind) {return dir(90 + (ind + 12) * 360 / 13);}
void fill_pts(int[] points) {path p = get_point(points[0]);for (int i = 1; i < points.length; ++i) {p = p -- get_point(points[i]);}p = p --
↪  cycle;filldraw(p, RGB(160, 160, 160), black);}
fill_pts(new int[]{12, 13, 2, 3});fill_pts(new int[]{10, 11, 4, 5});fill_pts(new int[]{8, 9, 6, 7});
draw(polygon(13));for (int i = 1; i <= 13; ++i) {label(get_point(i), "$A_{" + (string)(i) + "}$", get_point(i));dot(get_point(i));}
pair B = intersectionpoint(get_point(8) -- 3 * (get_point(8) - get_point(9)) + get_point(9), get_point(7) -- 3 * (get_point(7) -
↪  get_point(6)) + get_point(6));
draw(get_point(7) -- B -- get_point(8));label("$B$", B, S);dot(B);\end{asy}
```

tex 代码：

2023 年第 35 届美国数学人才选拔（第一轮）

程国根　译

1. 将 $1,3,5$填入下表中的每一个非阴影方格内，使得对于每个方格，在与其相邻所有方格中，恰有一个所写数字和该方格相同．这里的“相邻方格”包括只共用一个点的方格，即对角相邻的方格.

注：本题有唯一的答案，但你只需要给出一个构造而无需证明.

2. 将 101个正整数按照一定顺序排列成一个 404位数：$2024,2025,2026,\cdots,2124$．这个 404位数是否有可能为素数?

3. 设正整数 $n\ge 2$，高度分别为 $1,2,\cdots,n$的 n座建筑排列在一条街道上．如果两座不同的建筑之间的所有建筑都比这两座建筑矮，则称这两座建筑是**屋顶友好的**．例如：建筑的高度依次为 $5,3,6,2,1,4$，则其中有 8对**屋顶友好的**建筑：$(5,3)$，$(5,6)$，$(3,6)$，$(6,2)$，$(6,4)$，$(2,1)$，$(2,4)$，$(1,4)$．用 n表示**屋顶友好的**建筑对数的最大和最小可能值，并进行证明.

4. 求证：对任意满足 $1\le\sqrt{x}\le y\le x^{2}$的实数 x,y，如下关于 a,b,c的方程组都有实数解：$$\begin{cases}a+b+c = \frac{x+x^2+x^4+y+y^2+y^4}{2}\\ab+ac+bc = \frac{x^3 + x^5 + x^6 + y^3 + y^5 + y^6}{2}\\abc=\frac{x^7+y^7}{2}\end{cases}$$

5. 在正十三边形 $A_{1}A_{2}\cdots A_{13}$中，直线 $A_{6}A_{7}$和 $A_{8}A_{9}$交于点 B．求证：阴影部分面积是总面积（包含 $\triangle A_{7}A_{8}B$）的一半.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年第35届美国数学人才选拔（第一轮）}\flushright 程国根\quad 译\ex 将$1,3,5$填入下表中的每一个非阴影方格内，
↪ 使得对于每个方格，在与其相邻所有方格中，恰有一个所写数字和该方格相同．这里的“相邻方格”包括只共用一个点的方格，
↪ 即对角相邻的方格．\begin{center}\includegraphics[scale=0.5]{USAMTS P1.pdf}\end{center}\textbf{注：本题有唯一的答案，
↪ 但你只需要给出一个构造而无需证明．}\vfill\ex 将$101$个正整数按照一定顺序排列成一个$404$位数：
↪ $2024,2025,2026,\cdots,2124$．这个$404$位数是否有可能为素数？\vfill\ex 设正整数$n\ge 2$，
↪ 高度分别为$1,2,\cdots,n$的$n$座建筑排列在一条街道上．如果两座不同的建筑之间的所有建筑都比这两座建筑矮，
↪ 则称这两座建筑是\textbf{屋顶友好的}．例如：建筑的高度依次为$5,3,6,2,1,4$，则其中有$8$对\textbf{屋顶友好的}建筑：
↪ $(5,3)$，$(5,6)$，$(3,6)$，$(6,2)$，$(6,4)$，$(2,1)$，$(2,4)$，$(1,4)$.
↪ 用$n$表示\textbf{屋顶友好的}建筑对数的最大和最小可能值，并进行证明．\vfill\ex 求证：对任意满足$1\le\sqrt{x}\le y\le
↪ x^{2}$的实数$x,y$，如下关于$a,b,c$的方程组都有实数解：$$\begin{cases}a+b+c =
↪ \frac{x+x^2+x^4+y+y^2+y^4}{2}\\ab+ac+bc = \frac{x^3 + x^5 + x^6 + y^3 + y^5 +
↪ y^6}{2}\\abc=\frac{x^7+y^7}{2}\end{cases}$$\vfill\ex 在正十三边形$A_{1}A_{2}\cdots A_{13}$中，
↪ 直线$A_{6}A_{7}$和$A_{8}A_{9}$交于点$B$．求证：阴影部分面积是总面积（包含$\triangle A_{7}A_{8}B$）的一半．
↪ \begin{center}\includegraphics[scale=0.7]{USAMTS P5.pdf}\end{center}
```