数学竞赛每日一练第 24 期解答

2021-06-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_10d0886a1101fe0b

设 $n \geq 2$，x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为 $(0,1)$ 内的 n 个两两不等的实数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{x_i - x_j\}^2 \geq \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$$

其中 $\{x\} = x - [x]$ 表示 x 的小数部分.

解答（PDF 中已展开）

证明注意到

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

与不等式右边形式一致，故考虑把不等式左边放缩为 $n-1$ 个平方之和.

不妨设 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$，对 $1 \leq r \leq n-1$，下标差为 r 的所有加项（下标模 n 考虑）为:

$$\{x_{1+r} - x_1\}^2 + \{x_{2+r} - x_2\}^2 + \cdots + \{x_{n+r} - x_n\}^2$$

于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{x_i - x_j\}^2 \\
=&\sum_{r=1}^{n-1}\left(\{x_{1+r} - x_1\}^2 + \{x_{2+r} - x_2\}^2 + \cdots + \{x_{n+r} - x_n\}^2\right) \\
\geq&\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\{x_{1+r} - x_1\} + \{x_{2+r} - x_2\} + \cdots + \{x_{n+r} - x_n\}\right)^2 \\
=&\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot r^2 \\
=&\frac{(n-1)(2n-1)}{6}
\end{aligned}$$

倒数第二行等号成立的理由如下:

$$\{x_{1+r} - x_1\} = x_{1+r} - x_1$$

$$\cdots$$

$$\{x_n - x_{n-r}\} = x_n - x_{n-r}$$

$$\{x_{n+1} - x_{n-r+1}\} = 1 + x_{n+1} - x_{n-r+1}$$

$$\cdots$$

$$\{x_{n+r} - x_n\} = 1 + x_{n+r} - x_n$$