2023 年德国数学奥林匹克

2023-06-16 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_110f07b7c291ede2

2023 年德国数学奥林匹克

程国根 译

第一天

1. 求所有整数对 (m,n)，$n \geq m$，使得

$$n^3 + m^3 - nm(n+m) = 2023.$$

2. 将一个三角形的每条边双向延长与该边相同的长度，得到六个新的点．求证：这六个点所围成的六边形面积至少为原三角形面积的 13 倍．

3. 在一次比赛中，学校想提名一个由 k 名学生组成的团队，其中 k 是一个给定的正整数．团队的每个成员必须参加杂耍、唱歌和心算三个项目的比赛．为了获得入队资格，该校的 $n \geq 2$ 名学生参加了资格赛，并确定了三个项目中每个项目的唯一排名．现在学校想提名一个满足以下条件的团队：
$(*)$ 如果一个学生 X 没有被提名入队，那么队里存在一个学生 Y 在至少两个项目上击败了 X．
求所有的正整数 $n \geq 2$，使得对于任何的排名组合，都可以选择一个团队来满足条件 $(*)$，当 (a)$k = 2$ 时；(b)$k = 3$ 时．

第二天

4. 求所有三元实数组 (a,b,c)，使得

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}.$$

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，AA' 和 BB' 为两条高，H 为垂心，C_0 为 AB 的中点．设 CC_0 关于 $\angle ACB$ 的角平分线的对称直线为 g，HC_0 关于 $\angle AHB$ 的角平分线的对称直线为 h．求证：g 和 h 的交点在直线 $A'B'$ 上．

6. 已知方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 有三个实数根 $x_1 < x_2 < x_3$．求证：对任意正整数 n，$\lceil x_3^n \rceil$ 均为 3 的倍数．

2023 年德国数学奥林匹克

程国根 译

第一天

1. 求所有整数对 (m,n)，$n\ge m$，使得 $$n^3+m^3-nm(n+m)=2023.$$

2. 将一个三角形的每条边双向延长与该边相同的长度，得到六个新的点．求证：这六个点所围成的六边形面积至少为原三角形面积的 13倍．

3. 在一次比赛中，学校想提名一个由 k名学生组成的团队，其中 k是一个给定的正整数．团

队的每个成员必须参加杂耍、唱歌和心算三个项目的比赛. 为了获得入队资格，该校的 $n\ge 2$ 名学生参加了资格赛，并确定了三个项目中每个项目的唯一排名. 现在学校想提名一个满足以下条件的团队：

$(*)$如果一个学生 X没有被提名入队，那么队里存在一个学生 Y在至少两个项目上击败了 X.

求所有的正整数 $n\ge 2$，使得对于任何的排名组合，都可以选择一个团队来满足条件 $(*)$，当 (a)$k=2$时；(b)$k=3$时.

第二天

4. 求所有三元实数组 (a,b,c)，使得 $$a+\frac{4}{b}=b+\frac{4}{c}=c+\frac{4}{a}.$$

5. 在锐角 $\triangle ABC$中，AA'和 BB'为两条高，H为垂心，C_{0}为 AB的中点. 设 CC_{0}关于 $\angle ACB$的角平分线的对称直线为 g，HC_{0}关于 $\angle AHB$的角平分线的对称直线为 h. 求证：g和 h的交点在直线 $A'B'$上.

6. 已知方程 $x^{3}-3x^{2}+1=0$有三个实数根 $x_{1}<x_{2}<x_{3}$. 求证：对任意正整数 n，$\lceil x_{3}^{n}\rceil$均为 3的倍数.

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass[openany]{ctexbook}
\usepackage[article]{pxxbook}

\usepackage{geometry}
\geometry{a5paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
%%% 适合手机阅读的 A6 版本

\usepackage{graphicx}

{\theoremstyle{plain}\theoremseparator{.}\theorembodyfont{\zihao{5}\songti}\newtheorem{ex}{}}

\begin{document}
\setDOCadd{../../}
\section*{2023 年德国数学奥林匹克}
\flushright 程国根\quad 译
\section*{第一天}
\ex 求所有整数对 $(m,n)$，$n\ge m$，使得 $$n^3+m^3-nm(n+m)=2023.$$
\vfill
\ex 将一个三角形的每条边双向延长与该边相同的长度，得到六个新的点. 求证：
↪ 这六个点所围成的六边形面积至少为原三角形面积的$13$倍.
\vfill
\ex 在一次比赛中，学校想提名一个由$k$名学生组成的团队，其中$k$是一个给定的正整数. 团队的每个成员必须参加杂耍、
↪ 唱歌和心算三个项目的比赛. 为了获得入队资格，该校的$n\ge 2$名学生参加了资格赛，
↪ 并确定了三个项目中每个项目的唯一排名. 现在学校想提名一个满足以下条件的团队：

$(*)$ 如果一个学生 $X$ 没有被提名入队，那么队里存在一个学生 $Y$ 在至少两个项目上击败了 $X$.

求所有的正整数 $n\ge 2$，使得对于任何的排名组合，都可以选择一个团队来满足条件 $(*)$，当 (a)$k=2$ 时；(b)$k=3$ 时.

\vfill
\section*{第二天}
```

```
\ex 求所有三元实数组 $(a,b,c)$，使得 $$a+\frac{4}{b}=b+\frac{4}{c}=c+\frac{4}{a}.$$
\vfill
\ex 在锐角$\triangle ABC$中，$AA'$和$BB'$为两条高，$H$为垂心，$C_{0}$为$AB$的中点．设$CC_{0}$关于$\angle
↪ ACB$的角平分线的对称直线为$g$，$HC_{0}$关于$\angle AHB$的角平分线的对称直线为$h$．求证：
↪ $g$和$h$的交点在直线$A'B'$上.
\vfill
\ex 已知方程$x^{3}-3x^{2}+1=0$有三个实数根$x_{1}<x_{2}<x_{3}$．求证：对任意正整数$n$，$\lceil
↪ x_{3}^{n}\rceil$均为$3$的倍数.
\vfill
\end{document}
```