大湾区二模第 11 题解答之矩生成函数（MGF）

2025-04-21　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_114510207b3aff7c

今天的大湾区二模第 11 题是一道新定义题目，如下：

11. 已知离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=x_i)=p_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$．定义随机变量 $Y=e^{tX}$ ($t\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数，e=2.71828…) 的分布列如下：

Y	e^{tx_1}	e^{tx_2}	…	e^{tx_n}
P	p_1	p_2	…	p_n

随机变量 Y 的数学期望 $E(Y)=E(e^{tX})=\sum_{i=1}^{n}e^{tx_i}p_i$ 称为随机变量 X 的生成函数，记为 $M_X(t)$．

$M_X'(0)$ 是函数 $M_X(t)$ 在 $t=0$ 处的导数，则

A. $M_X'(0)=E(X)$

B. 若 X 服从两点分布，$P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$，则 $M_X(t)=\frac{e^t}{2}$

C. 若 $X\sim B(n,p)$，则 $M_X(t)=(e^{tp}+1-p)^n$

D. 若实数 a,b 为常数，则 $M_{aX+b}(t)=e^{bt}\cdot M_X(at)$

注

这里的 $M_X(t)$ 为随机变量 X 的矩生成函数（Moment Generating Function，MGF），还有一个相关概念为概率生成函数（Probability Generating Function,PGF），定义如下：

$P_X(z)=E(z^X)=\sum_{i=1}^{n}z^ip_i.$

两者的联系与区别这里不赘述，感兴趣的读者可以自己阅读相关书籍.

本题看懂之后还是很简单的，以下为我的解答：

解答（PDF 中已展开）

答案及解析

1. **选项 A**

已知 $M_X(t)=\sum_{i=1}^{n}e^{tx_i}p_i$，对其求导可得 $M_X'(t)=\sum_{i=1}^{n}x_ie^{tx_i}p_i$．当 $t=0$ 时，$M_X'(0)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=E(X)$，A 选项**正确**.

1. **选项 B**

由定义，$M_X(t)=\sum_{i=1}^{2}e^{tx_i}p_i$，这里 $x_1=0$，$x_2=1$，$p_1=p_2=\frac{1}{2}$，则 $M_X(t)=e^{t\times0}\times\frac{1}{2}+e^{t\times1}\times\frac{1}{2}=\frac{1+e^t}{2}$，并非 $\frac{e^t}{2}$，B 选项**错误**.

1. **选项 C**

若 $X \sim B(n,p)$，则 $P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$0 \le k \le n$.

由定义 $M_X(t)=\sum\limits_{k=0}^{n} e^{tk}P(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{n} e^{tk}\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

由二项式定理 $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$，这里 $a=e^t p$，$b=1-p$，所以 $M_X(t)=(e^t p+1-p)^n$，并非 $(e^{tp}+1-p)^n$，C 选项**错误**.

1. **选项 D**

$M_{aX+b}(t)=E(e^{atX+bt})=e^{bt}E(e^{atX})=e^{bt}\cdot M_X(at)$

D 选项**正确**。

综上，答案是 **AD**。