2021 年中国台湾 IMOC——代数组

2021-08-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1151adf8cd4c7354

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试. 从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代. 下面就是 2021 年中国夏令营的 IMOC 练习题（代数组）.

（公式较长，阅读时请左右拖动，也可以看后面的图片版）

代数组

1. 求所有实数 x，满足

$$\sqrt{\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=x.$$

1. 对任意正整数 n，求所有 n 元实数组 $(a_1,\cdots,a_n)$，满足

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)=x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2^2x^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}^{n-1}x+\binom{n}{n}a_n^n.$$

1. 对任意满足 $xyz+x+y+z=4$ 的实数 x，y，z，证明：

$$(yz+6)^2+(zx+6)^2+(xy+6)^2\geq 8(xyz+5).$$

1. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足对任意实数 x，y，都有

$$f(f(x)+y^2)=x-1+(y+1)f(y).$$

1. 给定 M 为大于 1 的正实数，无穷实数列 a_1，a_2，$\cdots$ 满足 $a_n\in[1,M]$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 恒成立. 求证：对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 n 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+t-1}}{a_{n+t}}\geq t-\varepsilon$$

对任意正整数 t 均成立.

1. 设 n 为正整数，a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为实数. 记

$$S_0=\sum_{i=1}^{n}a_i^2, S_1=\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}, S_2=\sum_{i=2}^{n}a_ia_{i+2}$$

其中 $a_{n+1}=a_1$，$a_{n+2}=a_2$.
(1) 证明：$S_0-S_1\geq 0$;
(2) 证明：3 为满足如下条件的 C 的最小值：对任意的 n 和 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，有 $C(S_0-S_1)\geq S_1-S_2$.

1. 对任意满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ 的正实数 a，b，c，d，求证：

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+d}+\frac{d^3}{d+a}+4abcd\leq 6.$$

1. 求所有函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，满足对任意正整数 x，y，均有

$$f(x)+yf(f(x))<x(1+f(y))+2021.$$

1. 对任意给定的正整数 n，求

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\binom{n}{k}\cdot(-1)^k}{(n+1-k)^2}-\frac{(-1)^n}{(k+1)(n+1)}\right).$$

1. 对任意满足 $xyz+xy+yz+zx=4$ 的正实数 x，y，z，求证：

$$\sqrt{\frac{xy+x+y}{z}}+\sqrt{\frac{yz+y+z}{x}}+\sqrt{\frac{zx+z+x}{y}}\geq 3\sqrt{\frac{3(x+2)(y+2)(z+2)}{(2x+1)(2y+1)(2z+1)}}.$$

1. 对 $n\geq 2$ 个实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，求证：

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2\leq\prod_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^{2i}\right)$$

并求出等号成立时的 $(x_1,\cdots,x_n)$.

2021 年中国台湾 IMOC 问题集中文翻译

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试．从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代．下面就是 2021 年中国夏令营的 IMOC 练习题．

代数组

1. 求所有实数 x，满足

$$\sqrt{\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=x.$$

2. 对任意正整数 n，求所有 n 元实数组 $(a_1,\cdots,a_n)$，满足

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)=x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2^2x^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}^{n-1}x+\binom{n}{n}a_n^n.$$

3. 对任意满足 $xyz+x+y+z=4$ 的实数 x，y，z，证明：

$$(yz+6)^2+(zx+6)^2+(xy+6)^2\geq 8(xyz+5).$$

4. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足对任意实数 x，y，都有

$$f(f(x)+y^2)=x-1+(y+1)f(y).$$

5. 给定 M 为大于 1 的正实数，无穷实数列 a_1，a_2，$\cdots$ 满足 $a_n\in[1,M]$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 恒成立．求证：对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 n 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+t-1}}{a_{n+t}}\geq t-\varepsilon$$

对任意正整数 t 均成立．

6. 设 n 为正整数，a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为实数．记

$$S_0=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,S_1=\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1},S_2=\sum_{i=2}^{n}a_ia_{i+2}$$

其中 $a_{n+1}=a_1$，$a_{n+2}=a_2$．

(1) 证明：$S_0-S_1\geq 0$；

恩次方根

(2) 证明：3 为满足如下条件的 C 的最小值：对任意的 n 和 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有 $C(S_0 - S_1) \geq S_1 - S_2$.

7. 对任意满足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ 的正实数 a，b，c，d，求证：

$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+d} + \frac{d^3}{d+a} + 4abcd \leq 6.$$

8. 求所有函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足对任意正整数 x，y，均有

$$f(x) + yf(f(x)) < x(1 + f(y)) + 2021.$$

9. 对任意给定的正整数 n，求

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\binom{n}{k} \cdot (-1)^k}{(n+1-k)^2} - \frac{(-1)^n}{(k+1)(n+1)} \right).$$

10. 对任意满足 $xyz + xy + yz + zx = 4$ 的正实数 x，y，z，求证：

$$\sqrt{\frac{xy+x+y}{z}} + \sqrt{\frac{yz+y+z}{x}} + \sqrt{\frac{zx+z+x}{y}} \geq 3\sqrt{\frac{3(x+2)(y+2)(z+2)}{(2x+1)(2y+1)(2z+1)}}.$$

11. 对 $n \geq 2$ 个实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，求证：

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \leq \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{2i} \right)$$

并求出等号成立时的 $(x_1, \cdots, x_n)$.

恩次方根