2023 年伊朗数学奥林匹克（第二轮）

2023-05-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_11b3d24129fad9dd

2023 年伊朗数学奥林匹克（第二轮）

程国根　译

第一天

1. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，点 P 为一个定点，过 P 作 $PD\perp BC$ 交 BC 于点 D．设 PD 和 AB、AC 的交点分别为 E、F．$\triangle APE$ 的外接圆再次交 BP 于点 X，$\triangle APF$ 的外接圆再次交 CP 于点 Y．求证：CX，BY，PD 三线共点．

2. 求证：对任意正整数 $n\geq 2$，存在两两互质且均不小于 1402 的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，满足

$$[\frac{a_1}{a_2}]+[\frac{a_2}{a_3}]+\cdots+[\frac{a_n}{a_1}]=[\frac{a_2}{a_1}]+[\frac{a_3}{a_2}]+\cdots+[\frac{a_1}{a_n}].$$

3. 对一个 $n\times n$ 的方格表按如下规则进行染色：若 $i=j$，则将方格 (i,j) 染为黑色；若 $i<j$，则将方格 (i,j) 染为红色；若 $i>j$，则将方格 (i,j) 染为绿色．设 $a_{i,j}$ 为方格 (i,j) 的颜色．在每一次操作中，交换两列方格，并记录下 n 元有序组 $(a_{1,1},a_{2,2},\cdots,a_{n,n})$．重复进行操作，最多能得到多少个不同的 n 元有序组?

第二天

4. 给定正整数 n．求最小的正整数 k，使得能在 $3\times k$ 的方格表中填入自然数，满足：

(1) 每一列的三个数字之和为 n；

(2) $0,1,\cdots,n$ 中的每个数字至少出现一次．

5. 设 P、Q 为整系数首一多项式，且不存在公共的整数根．$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ 满足：$P_1=P$，且对任意正整数 n，$P_{n+1}=P_n+Q$．已知 $\{P_n\}$ 中的每一项均至少存在一个整数根．求证：(1)$Q(x)$ 整除 $P(x)$；(2)$\deg\dfrac{P(x)}{Q(x)}=1$．

6. 等圆 W_1 和 W_2 交于 P、Q 两点．在 W_1 上取点 B，使 B 在 W_2 内部，在 W_2 上取点 C，使 C 在 W_1 内部．点 X、Y（异于 P）分别在 W_1、W_2 上，满足 $\angle BPQ=\angle BYQ$，$\angle CPQ=\angle CXQ$．记 $\odot(YPB)$ 和 $\odot(XPC)$ 再次交于点 S．求证：BC、XY、QS 三线共点．

tex 文稿：

2023 年伊朗数学奥林匹克（第二轮）

程国根　译

第一天

1. 在直角 $\triangle ABC$中，$\angle A=90^{\circ}$，点 P为一个定点，过 P作 $PD\perp BC$交 BC于点 D．设 PD和 AB、AC的交点分别为 E、F．$\triangle APE$的外接圆再次交 BP于点 X，$\triangle APF$的外接圆再次交 CP于点 Y．求证：CX，

BY，PD三线共点.

2. 求证：对任意正整数 $n\ge 2$，存在两两互质且均不小于 1402的正整数 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，满足 $$[\frac{a_1}{a_2}]+[\frac{a_2}{a_3}]+\cdots+[\frac{a_n}{a_1}] = [\frac{a_2}{a_1}]+[\frac{a_3}{a_2}]+\cdots+[\frac{a_1}{a_n}].$$

3. 对一个 $n\times n$的方格表按如下规则进行染色：若 $i=j$，则将方格 (i,j)染为黑色；若 $i<j$，则将方格 (i,j)染为红色；若 $i>j$，则将方格 (i,j)染为绿色. 设 $a_{i,j}$为方格 (i,j)的颜色. 在每一次操作中，交换两列方格，并记录下 n元有序组 $(a_{1,1},a_{2,2},\cdots,a_{n,n})$. 重复进行操作，最多能得到多少个不同的 n元有序组?

第二天

4. 给定正整数 n. 求最小的正整数 k，使得能在 $3\times k$的方格表中填入自然数，满足：

1. 每一列的三个数字之和为 n；
2. $0,1,\cdots,n$中的每个数字至少出现一次.

5. 设 P、Q为整系数首一多项式,且不存在公共的整数根.$\{P_{n}\}_{n\in\mathbb{N_{+}}}$满足：$P_{1}=P$，且对任意正整数 n，$P_{n+1}=P_{n}+Q$. 已知 $\{P_{n}\}$中的每一项均至少存在一个整数根. 求证：(1)$Q(x)$整除 $P(x)$；(2)$\deg\dfrac{P(x)}{Q(x)}=1$.

6. 等圆 W_{1}和 W_{2}交于 P、Q两点. 在 W_{1}上取点 B, 使 B在 W_{2}内部，在 W_{2}上取点 C，使 C在 W_{1}内部. 点 X、Y（异于 P）分别在 W_{1}、W_{2}上，满足 $\angle BPQ=\angle BYQ$，$\angle CPQ=\angle CXQ$. 记 $\odot(YPB)$和 $\odot(XPC)$再次交于点 S. 求证：BC、XY、QS三线共点.

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{enumitem}
\usepackage{geometry}
\usepackage{setspace}
\geometry{a5paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
\usepackage{hyperref}
\begin{document}
\begin{spacing}{1.2}
\section*{2023 年伊朗数学奥林匹克（第二轮）}

\begin{flushright}
程国根\quad 译
\end{flushright}

\section*{第一天}
```

{\bf 1.}在直角$\triangle ABC$中，$\angle A=90^{\circ}$，点P为一个定点，过P作$PD\perp BC$交BC于点D.
↪ 设PD和AB、AC的交点分别为E、F. $\triangle APE$的外接圆再次交BP于点X，$\triangle
↪ APF$的外接圆再次交$CP$于点$Y$. 求证：$CX$，$BY$，$PD$三线共点.
\vfill

{\bf 2.}求证：对任意正整数$n\ge 2$，存在两两互质且均不小于1402的正整数$a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，
↪ 满足$$[\frac{a_1}{a_2}]+[\frac{a_2}{a_3}]+\cdots+[\frac{a_n}{a_1}] =
↪ [\frac{a_2}{a_1}]+[\frac{a_3}{a_2}]+\cdots+[\frac{a_1}{a_n}].$$
\vfill

{\bf 3.}对一个$n\times n$的方格表按如下规则进行染色：若$i=j$，则将方格(i,j)染为黑色；若$i<j$，则将方格(i,j)染为红色；
↪ 若$i>j$，则将方格(i,j)染为绿色. 设$a_{i,j}$为方格(i,j)的颜色. 在每一次操作中，交换两列方格，
↪ 并记录下n元有序组$(a_{1,1},a_{2,2},\cdots,a_{n,n})$. 重复进行操作，最多能得到多少个不同的$n$元有序组？
\vfill
\section*{第二天}
{\bf 4.} 给定正整数 n. 求最小的正整数 k，使得能在 $3\times k$ 的方格表中填入自然数，满足：
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]
\item 每一列的三个数字之和为 n；
\item $0,1,\cdots,n$ 中的每个数字至少出现一次.
\end{enumerate}
\vfill

{\bf 5.}设P、Q为整系数首一多项式，且不存在公共的整数根. $\{P_{n}\}_{n\in\mathbb{N_{+}}}$满足：$P_{1}=P$，
↪ 且对任意正整数n，$P_{n+1}=P_{n}+Q$. 已知$\{P_{n}\}$中的每一项均至少存在一个整数根. 求证：(1)$Q(x)$整除$P(x)$；
↪ (2)$\deg\dfrac{P(x)}{Q(x)}=1$.
\vfill

{\bf 6.}等圆W_{1}和W_{2}交于P、Q两点. 在W_{1}上取点B，使B在W_{2}内部，在W_{2}上取点C，
↪ 使C在W_{1}内部. 点X、Y（异于P）分别在W_{1}、W_{2}上，满足$\angle BPQ=\angle BYQ$，$\angle
↪ CPQ=\angle CXQ$. 记$\odot(YPB)$和$\odot(XPC)$再次交于点$S$. 求证：$BC$、$XY$、$QS$三线共点.
\vfill
\end{spacing}
\end{document}