“权重集中引理”在不等式中的应用三例

2026-09-07　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_12353f0ccf9dac56

权重集中引理

设 $C_1 \geq C_2 \geq \cdots \geq C_n \geq 0$，$0 \leq y_i \leq 1$，且对某个整数 $1 \leq k \leq n$ 有 $\sum_{i=1}^{n} y_i \leq k$，则 $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i \leq \sum_{i=1}^{k} C_i$.

解答（PDF 中已展开）

证明

由 $C_i \leq C_k$ $(i > k)$ 及 $\sum y_i \leq k$，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_i y_i &\leq \sum_{i=1}^{k} C_i y_i + C_k \left(k - \sum_{i=1}^{k} y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} [C_k + (C_i - C_k) y_i] \leq \sum_{i=1}^{k} C_i.\end{aligned}$$

特别地，若 $\sum y_i = t \in \mathbb{Z}$，则加权和不超过最大的前 t 个系数之和.

注

引理名字是我自己起的，在使用时需要证明.

一般而言，取小函数 $\{x\} \in [0, 1)$，故天然适合作为权重出现. 而很多题目中会给出 $\sum x_i$ 为某个固定整数，因此此类题目常常可以考虑使用本引理进行处理，见下面的第二、三题.

第一题（2025 年全国高中数学联赛加试 P2）

题目

设 m, n, k 都是正整数，$m \geq 2$，$n \geq k \geq 2$，实数 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ 满足 $x_1^m + \cdots + x_n^m \geq 1, x_1 + \cdots + x_n \leq k$.

解答（PDF 中已展开）

证明 $x_1 + \cdots + x_k \geq 1$.

思路

若 $x_1 \geq 1$ 则结论显然. 否则令 $y_i = x_i^{m-1}$，则 $0 \leq y_i \leq x_i \leq 1$，且总权重不超过 k. 以 x_i 为递减系数应用权重集中引理即可.

证明

若 $x_1 \geq 1$，结论成立. 以下设 $x_1 < 1$，令 $y_i = x_i^{m-1}$. 由 $m \geq 2$，

$0 \le y_i \le x_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i \le k.$

对递减系数 $C_i = x_i$ 应用权重集中引理，

$1 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \le \sum_{i=1}^{k} C_i = \sum_{i=1}^{k} x_i.$

故 $x_1 + \cdots + x_k \ge 1$.

第二题（数之谜原创代数 668）

题目

给定整数 $n \ge 3$. 设 $a_1, \ldots, a_n$ 是不全相同的正实数，满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$. 求 $T = \sum_{i=1}^{n} i\{a_i\}$ 的取值范围.

思路

令 $x_i = \{a_i\}$，则 $t = \sum x_i$ 是整数. 固定 t 后，对 $1, 2, \ldots, n$ 及其反向排列分别应用权重集中引理，可得 T 的严格上下界；再证明两个端点之间的值均可取得，最后对 t 取并集.

解答（PDF 中已展开）

解

令 $x_i = \{a_i\}$，$t = \sum x_i = n - \sum \lfloor a_i \rfloor$. 由平均值为 1，至少有一个 $a_i \ge 1$，故 $t \le n-1$. 若 $t = 0$，则所有 a_i 都是正整数，由 $\sum a_i = n$ 得 $a_1 = \cdots = a_n = 1$，矛盾. 因此 $1 \le t \le n-1$.

固定 t. 对 $T = \sum i x_i$ 及 $(n+1)t - T = \sum (n+1-i) x_i$ 分别应用权重集中引理. 由于 $x_i < 1$，而两组系数均严格递减，端点等号都不可能成立，于是

$\frac{t(t+1)}{2} < T < \frac{t(2n-t+1)}{2}$.

设 $\mathcal{P}_t = \{(x_1, \ldots, x_n) : 0 < x_i < 1,\ \sum x_i = t\}$. 它非空且为凸集，故线性函数 $\sum i x_i$ 的像是区间. 令前 t 个 x_i 趋近于 1、其余趋近于 0，可逼近左端点；令后 t 个趋近于 1，可逼近右端点. 结合端点均不能取得，固定 t 时的值域恰为 $I_t = (t(t+1)/2,\ t(2n-t+1)/2)$. 反之，对任意 $(x_i) \in \mathcal{P}_t$，取 $a_1 = n - t + x_1$，$a_i = x_i$ $(i \ge 2)$，则 $a_1 > 1 > a_i$ $(i \ge 2)$，$\sum a_i = n$，且 $\{a_i\} = x_i$，故区间内每个值都能取得.

当 $n = 3$ 时，$I_1 = (1, 3)$，$I_2 = (3, 5)$. 当 $n \ge 4$ 时，对 $1 \le t \le n-2$，$\sup I_t - \inf I_{t+1} = t(n-t-1) - 1 > 0$，故相邻区间两两相交. 所以

$$\boxed{T \in \begin{cases} (1,3) \cup (3,5), & n = 3, \\ \left(1, \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right), & n \ge 4. \end{cases}}$$

第三题（数之谜原创代数 698）

题目

求最小的实数 C，使得对任意满足 $a_1 + \cdots + a_{100} = 100$ 的非负实数 $a_1, \ldots, a_{100}$，恒有

$\sum_{1 \le i < j \le 100} i\{a_i\} \max\{a_i, a_j\} \le C,$

其中 $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$.

思路

写 $a_i=q_i+r_i$，其中 $q_i=\lfloor a_i\rfloor$，$r_i=\{a_i\}$，则 $t=\sum r_i$ 是整数. 先把原式分成两类关于 r_i 的加权和，再分别应用权重集中引理；所得上界只依赖 t，最后求一个三次式的整数最大值，并构造逼近等号的数列.

解答（PDF 中已展开）

解

记 $q_i=\lfloor a_i\rfloor$，$r_i=\{a_i\}$，$t=\sum r_i=100-\sum q_i$. 于是 $t\in\{0,1,\dots,99\}$. 若 $t=0$，原式为 0；以下设 $1\le t\le 99$，并记左端为 S. 由 $\max\{a_i,a_j\}\le q_i+q_j+1$，

$$\begin{aligned}S&\le\sum_{1\le i<j\le 100} ir_i(q_i+q_j+1)\\&=\sum_{i=1}^{100} i(100-i)r_i+\sum_{j=1}^{100} q_j\left(j(100-j)r_j+\sum_{i<j} ir_i\right).\end{aligned}$$

记 $A=\sum i(100-i)r_i$. 因 $i(100-i)=2500-(i-50)^2$，最大的 t 个系数对应于 $0^2,1^2,1^2,2^2,2^2,\dots$ 中最小的 t 项. 这些平方数之和在 t 为奇数时为 $t(t^2-1)/12$，在 t 为偶数时更大，故由权重集中引理，

$A\le 2500t-\frac{t(t^2-1)}{12}$.

再记 $B_j=j(100-j)r_j+\sum_{i<j} ir_i$，并令 $M_t=(-t^2+200t+9801)/4$. 当 $t\le j\le 99$ 时，最大的 t 个系数为 $j(100-j),j-1,\dots,j-t+1$；当 $j<t$ 或 $j=100$ 时，取全部正系数再补零即可. 权重集中引理给出

$$\begin{aligned}B_j&\le -j^2+(99+t)j-\frac{t(t-1)}{2}\le M_t,\quad t\le j\le 99,\\B_j&\le\frac{j(199-j)}{2}\le\frac{t(199-t)}{2}\le M_t,\qquad j<t,\\B_{100}&\le\frac{t(199-t)}{2}\le M_t.\end{aligned}$$

第一行最后一步由配方得到；第二行利用 $u(199-u)$ 在 $0\le u\le 99$ 上递增；而 $M_t-\frac{t(199-t)}{2}=\frac{(99-t)^2}{4}\ge 0$.

由 $\sum q_j=100-t$，

$$\begin{aligned}S&\le 2500t-\frac{t(t^2-1)}{12}+M_t(100-t)=:F(t)\\&=\frac{t^3-450t^2+30299t+1470150}{6},\\F(t+1)-F(t)&=\frac{t^2-299t+9950}{2}.\end{aligned}$$

令 $g(t)=t^2-299t+9950$. 对 $1\le t\le 98$，$g(t+1)-g(t)=2t-298<0$；而 $g(38)=32>0$，$g(39)=-190<0$.故 $F(t)$ 在整数点上先增后减,最大值在 $t=39$ 处取得,即 $S\le F(39)=337780$.

为说明上界不能减小，取 $0<\varepsilon<1/40$，令

$$a_i=\begin{cases}1-\varepsilon, & 31\le i\le 68,\\ 62-\varepsilon, & i=69,\\ 39\varepsilon, & i=100,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} S=\sum_{i=31}^{69} i(100-i)+61\left(\sum_{i=31}^{68} i+69\cdot 31\right)=337780.$$

此时恒有 $\sum a_i=100$. 因此任意小于 337780 的常数都不能恒成立，从而 $\boxed{C_{\min}=337780}$.

欢迎大家在留言区补充更多题目.