2021 年中国台湾 IMOC——组合组

2021-08-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1255350af7174120

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试. 从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代. 下面就是 2021 年中国夏令营的 IMOC 练习题.

组合组

1. 数字 1，2，$\cdots$，2021 被排成一圈. 对任意 $1 \leq i \leq 2021$，如果 i，$i+1$，$i+2$ 按照某种顺序被排在连续三个位置上，且 $i+1$ 不在中间，则称 i 为一个好数. (在这里，我们将 2022 视为 1，将 2023 视为 2) 则最多有多少个好数?

2. 给定一个正整数 N. 有三只松鼠，每只松鼠有一个正整数. 已知其中最大的整数和最小的整数之差为 N. 每一时刻，拥有第二大整数的松鼠看向拥有最大整数的的松鼠. 如果它们所拥有的整数不同，那么拥有第二大整数的松鼠会不满意，并对拥有最大整数的的松鼠进行攻击，使拥有最大整数的松鼠所拥有的整数减少它们两者所拥有整数之差的 2 倍. 如果拥有整数第二和第三的松鼠所拥有的整数相同，只有一只松鼠会发起攻击. 攻击会一直进行，直至拥有最大整数和第二大整数的松鼠拥有的整数相同. 问：最多能进行多少次攻击?

3. 两只松鼠 B 和 J 为过冬收集了 2021 个核桃. J 将核桃依次编号为 1 到 2021，并在它们最喜欢的树周围挖了一圈共 2021 个小坑. 第二天早上，J 发现 B 已经在每个小坑里放入了一枚核桃，但并未注意编号. 不开心的 J 决定改变这些核桃的位置，B 决定干涉 J. 它们俩轮流进行操作来改变核桃的位置. 每一回合，B 选择 1232 个核桃并改变它们的位置，而 J 选择 n 个核桃并改变它们的位置. 求最小的正整数 n，使得不论 B 怎么操作，J 总能在有限次操作内，将第 i 个核桃放在第 i 个洞中.

4. 在一个城市中有若干个房子，房子被一些双向的道路所连接. 已知对于任意两个房子 A 和 B，恰好存在一个房子 C，满足 A 和 B 均能通过一些道路和 C 相连. 求证：对任意不能通过一条道路直接相连的两所房子，它们所连出的道路数目相等.

5. 一个醉汉在一棵树上随机地走动. 每次，醉汉等可能地随机选择一个相邻的节点并走过去. 求证：无论醉汉的起点和终点在哪，醉汉从起点首次到达终点的步数的期望值均为整数.

6. 两人在一个有 2022 个点的图上进行游戏. 开始时，图上没有任何边. 两人轮流选择两个非相邻顶点，并用一条边连接它们. 将图变为连通图的人失败，问谁有必胜策略?

7. 给定一个正整数 n，称一个由 $2n$ 个小正方形组成的图形为 n-枪，如果它由一个 $1 \times n$ 的网格和一个 $n \times 1$ 的网格组成，且其中一个网格角落的单位正方形与另一个网格角落的单位正方形相邻. 求正整数 k 的最小可能值，使得能将平面上的无穷网格染成 k 种颜色，且任意 n-枪无法覆盖两个有相同颜色的不同单位正方形.

8. 求所有正整数 m 和 n，使得 $m \times n$ 网格能被 2×3 的网格去掉一个角落小方格后形成的图形所覆盖.

9. 一个简单图中的两个顶点 A 和 B，满足从 A 到 B 恰好有 100 条最短路径. 求图中顶点个数的最小值.

10. 在一个 100×100 的网格中，有一只蜘蛛和 100 只虫子. 每次，蜘蛛可以向上、下、左、右四个方向之一移动，蜘蛛的目标是经过所有有虫子的格子，并将虫子全部吃掉. 蜘蛛从左上角的格子出发. 求证：不论虫子怎么分布，蜘蛛总能用 2000 步将它们全部吃掉.

11. 在一个 $m \times n$ 的网格中，每个方格或被填入 X，或没被填入. 对每个方格，如果其中填有 X，则将其记为 0；如果其中没有填入 X，则将其记为此方格周围的 8 个方格中被填入 X 的方格数. 这里，如果两个方格有公共边或公共顶点，则它们彼此相邻. 设 $f(m,n)$ 为网格中所有标记的数总和的最大值. 求最小的实数 C，使得

$$\frac{f(m,n)}{mn} \leq C$$

对任意正整数 m，n 恒成立.