一分钟做不等式系列（14）——2026 年比荷卢数学竞赛

2026-04-27　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_127da1948abbd181

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

35 (2026 年比荷卢数学竞赛). 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 均为正实数，且满足 $\forall 1 \le k \le n$，都有 $a_k(b_1 + \cdots + b_k) \le k$，$b_k(a_1 + \cdots + a_k) \le k$. 求证：

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \le n^2.$$

证明 记 $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$，$B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$，条件即为 $a_k B_k \le k$，$b_k A_k \le k$. 对 n 归纳.

(1) $n = 1$ 时，结论显然成立.

(2) 若结论在 n 时成立，即 $A_n B_n \le n^2$，考虑 $n+1$ 时的情形：

反证，若 $A_{n+1}B_{n+1} > (n+1)^2$，则 $a_{n+1} \le \dfrac{n+1}{B_{n+1}} < \dfrac{A_{n+1}}{n+1}$，即 $a_{n+1} < \dfrac{A_n}{n}$.

同理 $b_{n+1} < \dfrac{B_n}{n}$.

于是 $A_{n+1}B_{n+1} < (A_n + \dfrac{A_n}{n})(B_n + \dfrac{B_n}{n}) = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} A_n B_n \le (n+1)^2$，与假设矛盾.

因此结论在 $n+1$ 时也成立.