一分钟做不等式系列（2）——2023 年 IMO 预选题 A5

2025-01-23　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_12e864b6c76c3bb7

19 (2023 年 IMO 预选题 A5). 设正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2023}$ 满足：

(1) $a_1, a_2, \cdots, a_{2023}$ 是 $1, 2, \cdots, 2023$ 的一个排列；

(2) $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \cdots, |a_{2022} - a_{2023}|$ 是 $1, 2, \cdots, 2022$ 的一个排列.

求证：$\max\{a_1, a_{2023}\} \geq 507$.

证明 假设 $a_1, a_{2023} \leq 506$，则由 $|a_k - a_{k+1}| \leq |a_k - 1012| + |a_{k+1} - 1012|$ $(1 \leq k \leq 2022)$ 知：

$$\sum_{k=1}^{2022} |a_k - a_{k+1}| \leq 2\sum_{k=1}^{2023} |a_k - 1012| - |a_1 - 1012| - |a_{2023} - 1012| \leq 2\sum_{k=1}^{2023} |a_k - 1012| - 1012.$$

即 $\sum_{k=1}^{2022} k \leq 2\sum_{k=1}^{2023} |k - 1012| - 1012$，也即 $\frac{2022 \times 2023}{2} \leq 2 \times 2 \times \frac{1011 \times 1012}{2} - 1012$，矛盾.

因此 $\max\{a_1, a_{2023}\} \geq 507$.

事实上本题还是有不小的难度的，求和再用绝对值不等式放缩的操作比较自然，但这个局部需要猜一猜。

改为求 max{a_1,a_{2023}} 的最小值会更难一些，感兴趣的读者不妨试试。