2024 年罗马尼亚数学奥林匹克（地区级）

2024-03-15 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_13075b31bc4dbe9f

2024 年罗马尼亚数学奥林匹克（地区级）

程国根 译

九年级组

1. 凸四边形 $ABCD$ 的对角线交点为 O. 已知

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OC},$$

求证：$ABCD$ 为平行四边形.

2. 数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ 定义如下：$a_1=\dfrac{1}{2}$，$2na_{n+1}=(n+1)a_n$.

(1) 求 a_n 的通项公式.

(2) 设 $b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 求证：

$$\{b_n\}-\{b_{n+1}\}\neq\{b_{n+1}\}-\{b_{n+2}\}.$$

译者注：(2) 中的 $\{b_n\}$ 指小数部分，即 $\{b_n\}=b_n-[b_n]$.

3. 设正整数 n 的所有正约数为 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$. 已知对任意 $i=1,2,\cdots,k-2$，关于 x 的方程 $d_{i+2}x^2-2d_{i+1}x+d_i=0$ 均有实根. 求证：$n=p^{k-1}$，其中 p 为素数.

4. 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，边 BC 的中点为 X. 过 H 作 HX 的垂线，和 AB,AC 分别交于点 Y,Z. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，O' 为 $\triangle BHC$ 的外心.

(1) 求证：$HY=HZ$.

(2) 求证：$\overrightarrow{AY}+\overrightarrow{AZ}=2\overrightarrow{OO'}$.

十年级组

1. 设 $a,b\in\mathbb{R}$，$a>1$，$b>0$．求最小的正实数 α，使得对任意 $x\geq\alpha$，都有

$$(a+b)^x\geq a^x+b.$$

2. 设 $\triangle ABC$ 内接于单位圆 O．对 $\odot O$ 上任意一点 M（异于 A,B,C）定义 $s(M)=OH_1^2+OH_2^2+OH_3^2$，其中 H_1,H_2,H_3 分别为 $\triangle MAB$，$\triangle MBC$，$\triangle MCA$ 的垂心．

(1) 求证：若 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $s(M)=6$ 恒成立．

(2) 求证：若 $\odot O$ 上存在不同三点 M_1,M_2,M_3（异于 A,B,C），使得 $s(M_1)=s(M_2)=s(M_3)$，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形．

3. 设 a,b,c 为非零复数，满足 $|a|=|b|=|c|$，已知 $A=a+b+c$ 和 $B=abc$ 均为实数．求证：对任意自然数 n，$a^n+b^n+c^n$ 均为实数．

4. 设 n 为正整数．求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有

$$f(x+y^{2n})=f(f(x))+y^{2n-1}f(y),$$

且 $f(x)=0$ 恰有一个实根．

十一年级组

1. 矩阵 $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ 满足 $X^{2022} = X^{2023}$. 求证：$X^2 = X^3$.

2. 设整数 $k \geq 2$. 数列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 定义如下：$x_1 = a > 0$，对任意 $n \geq 1$，$x_{n+1} = x_n + \left\lfloor \dfrac{k}{a_n} \right\rfloor$. 求证：数列 x_n 收敛，并求其极限.

3. 设 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 是一个反对称矩阵，即 $A = -A^t$.

(1) 求证：若 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$，且 $A^2 = O_n$，则 $A = O_n$.

(2) 设 n 为奇数，求证：若 A 为另一个矩阵 $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 的伴随矩阵，则 $A^2 = O_n$

4. 考虑函数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其中 f 为连续函数. 对任意实数 $a < b < c$，存在一个极限为 b 的数列 $(x_n)_{n\geq 1}$，使得 n 趋于无穷时，$g(x_n)$ 的极限存在，且

$$f(a) < \lim_{n\to\infty} g(x_n) < f(c).$$

(1) 试给出一个满足题意的 f, g 的构造，其中 g 处处不连续.

(2) 求证：若 g 单调，则 $f = g$.

十二年级组

1. 求所有正整数 $n \geq 2$，使得方程 $x^2 - \hat{3} \cdot x + \hat{5} = \hat{0}$ 在 $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ 中有唯一解.

2. 设 $f : [0,1] \to (0, +\infty)$ 是连续函数，$A = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

(1) 考虑函数 $F : [0,1] \to [0, A]$，定义如下：$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 求证：$F(x)$ 存在反函数，且反函数可微.

(2) 求证：存在唯一的函数 $g : [0,1] \to [0,1]$，使得对任意 $x \in [0,1]$，都有 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{g(x)}^1 f(t)\mathrm{d}t$.

(3) 求证：存在 $c \in [0,1]$，使得 $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x) - c}{x - c} = -1$，其中 g 为 (2) 中唯一的函数.

3. 设 k 为正整数. 称环 $(A, +, \cdot)$ 具有性质 P_k，如果对任意 $a, b \in A$，都存在 $c \in A$，使得 $a^k = b^k + c^k$.

(1) 给出一个有限环 $(A, +, \cdot)$，对任意 $k \geq 2$，其都不具有性质 P_k.

(2) 设整数 $n \geq 3$，$M_n = \{m \in \mathbb{N}_+ \mid (Z_n, +, \cdot)$具有性质$P_m\}$. 求证：$M_n$ 中的所有元素都为奇数，且 $(M_n, \cdot)$ 是一个幺半群.

4. 设 $f : [0, +\infty)$ 一个可导函数，且导数连续. 已知 $f(0) = 0$，对任意 $x > 0$，$0 \leq f'(x) \leq 1$. 求证：对任意正整数 n 和实数 $a > 0$，都有

$$\frac{1}{n+1} \int_0^a f(t)^{2n+1}\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^a f(t)^n \mathrm{d}t \right)^2.$$

4

最近的题目解答主要发在了 B 站上，大家可以去关注一下。



2024 年罗马尼亚数学奥林匹克（地区级）

程国根　译

九年级组

1. 凸四边形 $ABCD$的对角线交点为 O. 已知 $$\vv{AB}+\vv{AD}+\vv{AO}=\vv{BC}+\vv{DC}+\vv{OC},$$ 求证：$ABCD$为平行四边形.

2. 数列 $(a_{n})_{n\ge 1}$定义如下：$a_{1}=\frac{1}{2}$，$2na_{n+1}=(n+1)a_{n}$.

   1. 求 a_{n}的通项公式.
   2. 设 $b_{n}=a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n}$. 求证：$$\{b_{n}\}-\{b_{n+1}\}\neq\{b_{n+1}\}-\{b_{n+2}\}.$$ 译者注：（2）中的 $\{b_{n}\}$指小数部分，即 $\{b_{n}\}=b_{n}-[b_{n}]$.

3. 设正整数 n的所有正约数为 $1=d_{1}< d_{2}< \cdots< d_{k}=n$. 已知对任意 $i=1,2,\cdots,k-2$，关于 x的方程 $d_{i+2}x^{2}-2d_{i+1}x+d_{i}=0$均有实根. 求证：$n=p^{k-1}$，其中 p为素数.

4. 设 $\triangle ABC$的垂心为 H，边 BC的中点为 X. 过 H作 HX的垂线，和 AB,AC分别交于点 Y,Z. 设 O为 $\triangle ABC$的外心，O'为 $\triangle BHC$的外心.

   1. 求证：$HY=HZ$.
   2. 求证：$\vv{AY}+\vv{AZ}=2\vv{OO'}$.

十年级组

1. 设 $a,b\in\mathbb{R}$, $a>1$, $b>0$. 求最小的正实数 α, 使得对任意 $x\ge \alpha$，都有 $$(a+b)^{x}\ge a^{x}+b.$$

2. 设 $\triangle ABC$内接于单位圆 O. 对 $\odot O$上任意一点 M（异于 A,B,C）定义 $s(M)=OH_{1}^{2}+OH_{2}^{2}+OH_{3}^{2}$，其中 H_{1},H_{2},H_{3}分别为 $\triangle MAB$，$\triangle MBC$，$\triangle MCA$的垂心.

   1. 求证：若 $\triangle ABC$为等边三角形，则 $s(M)=6$恒成立.
   2. 求证：若 $\odot O$上存在不同三点 M_{1},M_{2},M_{3}（异于 A,B,C），使得 $s(M_{1})=s(M_{2})=s(M_{3})$，则 $\triangle ABC$为等边三角形.

3. 设 a,b,c为非零复数，满足 $|a|=|b|=|c|$，已知 $A=a+b+c$和 $B=abc$均为实数. 求证：对任意自然数 n，$a^{n}+b^{n}+c^{n}$均为实数.

4. 设 n为正整数. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $$f(x+y^{2n})=f(f(x))+y^{2n-1}f(y),$$ 且 $f(x)=0$恰有一个实根.

十一年级组

1. 矩阵 $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$满足 $X^{2022}=X^{2023}$. 求证：$X^{2}=X^{3}$.

2. 设整数 $k\ge 2$. 数列 $(x_{n})_{n\ge 1}$定义如下：$x_{1}=a>0$，对任意 $n\ge 1$，$x_{n+1}=x_{n}+\left\lfloor\frac{k}{a_{n}}\right\rfloor$. 求证：数列 x_{n}收敛，并求其极限.

3. 设 $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$是一个反对称矩阵，即 $A=-A^t$.

   1. 求证：若 $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$，且 $A^{2}=O_{n}$，则 $A=O_{n}$.
   2. 设 n为奇数，求证：若 A为另一个矩阵 $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$的伴随矩阵，则 $A^{2}=O_{n}$

4. 考虑函数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，其中 f为连续函数. 对任意实数 $a<b<c$，存在一个极限为 b的数列 $(x_{n})_{n\ge 1}$，使得 n趋于无穷时，$g(x_{n})$的极限存在，且 $$f(a)<\lim_{n\to\infty}g(x_n)<f(c).$$

   1. 试给出一个满足题意的 f,g的构造，其中 g处处不连续.
   2. 求证：若 g单调，则 $f=g$.

十二年级组

1. 求所有正整数 $n\ge 2$，使得方程 $x^2-\hat{3}\cdot x+\hat{5}=\hat{0}$在 $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$中有唯一解.

2. 设 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$是连续函数，$A=\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t$.

   1. 考虑函数 $F:[0,1]\to[0,A]$，定义如下：$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$. 求证：$F(x)$存在反函数，且反函数可微.
   2. 求证：存在唯一的函数 $g:[0,1]\to[0,1]$，使得对任意 $x\in[0,1]$，都有 $\int_0^xf(t)\mathrm{d}t=\int_{g(x)}^1f(t)\mathrm{d}t$.
   3. 求证：存在 $c\in[0,1]$，使得 $\lim_{x\to c}\frac{g(x)-c}{x-c}=-1$，其中 g为 (2) 中唯一的函数.

3. 设 k为正整数. 称环 $(A,+,\cdot)$具有性质 P_{k}，如果对任意 $a,b\in A$，都存在 $c\in A$，使得 $a^{k}=b^{k}+c^{k}$.

   1. 给出一个有限环 $(A,+,\cdot)$，对任意 $k\ge 2$，其都不具有性质 P_{k}.
   2. 设整数 $n\ge 3$，$M_{n}=\{m\in\mathbb{N}_{+}\mid (Z_{n},+,\cdot)\text{具有性质}P_{m}\}$. 求证：$M_{n}$中的所有元素都为奇数，且 $(M_{n},\cdot)$是一个幺半群.

4. 设 $f:[0,+\infty)$一个可导函数，且导数连续. 已知 $f(0)=0$，对任意 $x>0$，$0\le f'(x)\le 1$. 求证：对任意正整数 n和实数 $a>0$，都有 $$\frac{1}{n+1}\int_0^af(t)^{2n+1}\mathrm{d}t\le\left(\int_0^af(t)^n\mathrm{d}t\right)^{2}.$$

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年罗马尼亚数学奥林匹克（地区级）}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\section*{九年级组}\ex
↪ 凸四边形$ABCD$的对角线交点为$O$. 已知$$\vv{AB}+\vv{AD}+\vv{AO}=\vv{BC}+\vv{DC}+\vv{OC},$$
求证：$ABCD$为平行四边形. \vfill\ex 数列 $(a_{n})_{n\ge 1}$ 定义如下：$a_{1}=\frac{1}{2}$，$2na_{n+1}=(n+1)a_{n}$.
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求$a_{n}$的通项公式. \item 设$b_{n}=a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n}$. 求证：
↪ $$\{b_{n}\}-\{b_{n+1}\}\neq\{b_{n+1}\}-\{b_{n+2}\}.$$
译者注：（2）中的$\{b_{n}\}$指小数部分，即$\{b_{n}\}=b_{n}-[b_{n}]$. \end{enumerate}\vfill\ex
↪ 设正整数$n$的所有正约数为$1=d_{1}< d_{2}< \cdots< d_{k}=n$. 已知对任意$i=1,2,\cdots,k-2$，
↪ 关于$x$的方程$d_{i+2}x^{2}-2d_{i+1}x+d_{i}=0$均有实根. 求证：$n=p^{k-1}$，其中$p$为素数. \vfill\ex 设$\triangle
↪ ABC$的垂心为$H$，边$BC$的中点为$X$. 过$H$作$HX$的垂线，和$AB,AC$分别交于点$Y,Z$. 设$O$为$\triangle
↪ ABC$的外心，$O'$为$\triangle BHC$的外心. \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求证：$HY=HZ$. \item 求证：
↪ $\vv{AY}+\vv{AZ}=2\vv{OO'}$. \end{enumerate}\vfill\newpage\section*{十年级组}\setcounter{ex}{0}\ex 设$a,b\in\mathbb{R}$，
↪ $a>1$，$b>0$. 求最小的正实数$\alpha$，使得对任意$x\ge \alpha$，都有$$(a+b)^{x}\ge a^{x}+b.$$\vfill\ex 设$\triangle
↪ ABC$内接于单位圆$O$. 对$\odot O$上任意一点$M$（异于$A,B,C$）定义$s(M)=OH_{1}^{2}+OH_{2}^{2}+OH_{3}^{2}$，
↪ 其中$H_{1},H_{2},H_{3}$分别为$\triangle MAB$，$\triangle MBC$，$\triangle MCA$的垂心.
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求证：若$\triangle ABC$为等边三角形，则$s(M)=6$恒成立. \item 求证：若$\odot
↪ O$上存在不同三点$M_{1},M_{2},M_{3}$（异于$A,B,C$），使得$s(M_{1})=s(M_{2})=s(M_{3})$，则$\triangle
↪ ABC$为等边三角形. \end{enumerate}\vfill\ex 设$a,b,c$为非零复数，满足$|a|=|b|=|c|$，已知$A=a+b+c$和$B=abc$均为实数.
↪ 求证：对任意自然数$n$，$a^{n}+b^{n}+c^{n}$均为实数. \vfill\ex 设$n$为正整数. 求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，
↪ 使得对任意$x,y\in\mathbb{R}$，都有$$f(x+y^{2n})=f(f(x))+y^{2n-1}f(y),$$
```

且$f(x)=0$恰有一个实根. \vfill\newpage\section*{十一年级组}\setcounter{ex}{0}\ex
↪ 矩阵$X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$满足$X^{2022}=X^{2023}$. 求证: $X^{2}=X^{3}$. \vfill\ex 设整数$k\ge 2$.
↪ 数列$(x_{n})_{n\ge 1}$定义如下: $x_{1}=a>0$, 对任意$n\ge 1$, $x_{n+1}=x_{n}+\left\lfloor\frac{k}{a_{n}}\right\rfloor$. 求证:
↪ 数列x_{n}收敛, 并求其极限. \vfill\ex 设$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$是一个反对称矩阵, 即$A=-A^t$.
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求证: 若$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, 且$A^{2}=O_{n}$, 则$A=O_{n}$. \item
↪ 设n为奇数, 求证: 若A为另一个矩阵$B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$的伴随矩阵,
↪ 则$A^{2}=O_{n}$\end{enumerate}\vfill\ex 考虑函数$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 其中$f$为连续函数. 对任意实数$a<b<c$,
↪ 存在一个极限为b的数列$(x_{n})_{n\ge 1}$, 使得n趋于无穷时, $g(x_{n})$的极限存在,
↪ 且$$f(a)<\lim_{n\to\infty}g(x_n)<f(c).$$\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 试给出一个满足题意的f,g的构造,
↪ 其中g处处不连续. \item 求证: 若g单调, 则$f=g$.
↪ \end{enumerate}\vfill\newpage\section*{十二年级组}\setcounter{ex}{0}\ex 求所有正整数$n\ge 2$, 使得方程$x^2-\hat{3}\cdot
↪ x+\hat{5}=\hat{0}$在$(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$中有唯一解. \vfill\ex 设$f:[0,1]\to(0,+\infty)$是连续函数,
↪ $A=\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t$. \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 考虑函数$F:[0,1]\to[0,A]$, 定义如下:
↪ $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$. 求证: $F(x)$存在反函数, 且反函数可微. \item 求证: 存在唯一的函数$g:[0,1]\to[0,1]$,
↪ 使得对任意$x\in[0,1]$, 都有$\int_0^xf(t)\mathrm{d}t=\int_{g(x)}^1f(t)\mathrm{d}t$. \item 求证: 存在$c\in[0,1]$,
↪ 使得$\lim_{x\to c}\frac{g(x)-c}{x-c}=-1$, 其中$g$为(2)中唯一的函数. \end{enumerate}\vfill\ex 设k为正整数.
↪ 称环$(A,+,\cdot)$具有性质P_{k}, 如果对任意$a,b\in A$, 都存在$c\in A$, 使得$a^{k}=b^{k}+c^{k}$.
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 给出一个有限环$(A,+,\cdot)$, 对任意$k\ge 2$, 其都不具有性质P_{k}. \item
↪ 设整数$n\ge 3$, $M_{n}=\{m\in\mathbb{N}_{+}\mid (Z_{n},+,\cdot)\text{具有性质}P_{m}\}$. 求证:
↪ M_{n}中的所有元素都为奇数, 且$(M_{n},\cdot)$是一个幺半群. \end{enumerate}\vfill\ex 设$f:[0,+\infty)$一个可导函数,
↪ 且导数连续. 已知$f(0)=0$, 对任意$x>0$, $0\le f'(x)\le 1$. 求证: 对任意正整数n和实数$a>0$,
↪ 都有$$\frac{1}{n+1}\int_0^af(t)^{2n+1}\mathrm{d}t\le\left(\int_0^af(t)^n\mathrm{d}t\right)^{2}.$$\vfill