2023 年以色列复仇赛

2023-06-17　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_13379ec6992d6055

2023 年以色列复仇赛

程国根　译

1. 犰狳和獾正在玩一个游戏．犰狳选择了一棵非空的树（无环的连通图），在它的一些顶点放置苹果（一个顶点上可能有几个苹果）．首先，獾选择了一个顶点 v_0 并吃掉了该顶点上所有的苹果．接下来，犰狳和獾交替进行，由犰狳开始．在第 i 轮，轮到的动物选择与 v_{i-1} 相邻的一个顶点 v_i（之前未被选中），并吃掉该顶点上所有的苹果．当没有这样的顶点 v_i 时，游戏结束．
犰狳的目标是在游戏结束时吃的苹果比獾多，它能实现愿望吗?

2. $\triangle ABC$ 内接于圆 Ω，A-伪内切圆与 Ω 的切点为 T．点 E,F 分别在边 AC,AB 上，满足 $EF\parallel BC$，且 $\odot(TEF)$ 和 Ω 相切．设 $\triangle AEF$ 的 A-旁切圆 ω 和直线 EF,AE,AF 分别切于点 K,Y,Z．直线 AT 和 ω 交于 P,Q 两点（P 在 A,Q 之间），直线 QK 和 YZ 交于点 V，ω 在 P 处的切线与 Ω 在 T 处的切线交于点 U．求证：$UV\parallel BC$．

3. 求所有（非严格）递增的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $f(f(x)+y)=f(f(y)+x)$．

4. 设 c 为正实数，非负整数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足以下条件：对任意正整数 n，

(1) $\dfrac{2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}}{n}$ 为整数；

(2) $2^{a_n}\le cn$．

求证：$a_1,a_2,\cdots$ 为最终常数数列．

2023 年以色列复仇赛

程国根　译

1. 犰狳和獾正在玩一个游戏．犰狳选择了一棵非空的树（无环的连通图），在它的一些顶点放置苹果（一个顶点上可能有几个苹果）．首先，獾选择了一个顶点 v_0并吃掉了该顶点上所有的苹果．接下来，犰狳和獾交替进行，由犰狳开始．在第 i轮，轮到的动物选择与 v_{i-1}相邻的一个顶点 v_i（之前未被选中），并吃掉该顶点上所有的苹果．当没有这样的顶点 v_i时，游戏结束．

犰狳的目标是在游戏结束时吃的苹果比獾多，它能实现愿望吗?

2. $\triangle ABC$内接于圆 Ω，A-伪内切圆与 Ω的切点为 T. 点 E,F分别在边 AC,AB上，满足 $EF\parallel BC$，且 $\odot(TEF)$和 Ω相切. 设 $\triangle AEF$的 A-旁切圆 ω和直线 EF,AE,AF分别切于点 K,Y,Z. 直线 AT和 ω交于 P,Q两点（P在 A,Q之间），直线 QK和 YZ交于点 V，ω在 P处的切线与 Ω在 T处的切线交于点 U. 求证：$UV\parallel BC$.

3. 求所有（非严格）递增的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $f(f(x)+y)=f(f(y)+x)$.

4. 设 c为正实数，非负整数列 $a_{1},a_{2},\cdots$满足以下条件：对任意正整数 n，

1. $\dfrac{2^{a_{1}}+2^{a_{2}}+\cdots+2^{a_{n}}}{n}$为整数；
2. $2^{a_{n}}\le cn$.

求证：$a_{1},a_{2},\cdots$为最终常数数列.

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass[openany]{ctexbook}
\usepackage[article]{pxxbook}

\usepackage{geometry}
\geometry{a5paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
%%% 适合手机阅读的 A6 版本

\usepackage{graphicx}

{\theoremstyle{plain}\theoremseparator{.}\theorembodyfont{\zihao{5}\songti}\newtheorem{ex}{}}

\begin{document}
\setDOCadd{../../}
\section*{2023 年以色列复仇赛}
\flushright 程国根\quad 译
\ex 犹狼和獾正在玩一个游戏. 犹狼选择了一棵非空的树（无环的连通图），在它的一些顶点放置苹果
↪ （一个顶点上可能有几个苹果）. 首先，獾选择了一个顶点$v_0$并吃掉了该顶点上所有的苹果. 接下来，犹狼和獾交替进行，
↪ 由犹狼开始. 在第$i$轮，轮到的动物选择与$v_{i-1}$相邻的一个顶点$v_i$（之前未被选中），并吃掉该顶点上所有的苹果.
↪ 当没有这样的顶点$v_i$时，游戏结束.

犹狼的目标是在游戏结束时吃的苹果比獾多，它能实现愿望吗？
\vfill
\ex $\triangle ABC$内接于圆$\Omega$，$A$-伪内切圆与$\Omega$的切点为$T$. 点$E,F$分别在边$AC,AB$上，满足$EF\parallel
↪ BC$，且$\odot(TEF)$和$\Omega$相切. 设$\triangle AEF$的$A$-旁切圆$\omega$和直线$EF,AE,AF$分别切于点$K,Y,Z$.
↪ 直线$AT$和$\omega$交于$P,Q$两点（$P$在$A,Q$之间），直线$QK$和$YZ$交于点$V$，
↪ $\omega$在$P$处的切线与$\Omega$在$T$处的切线交于点$U$. 求证：$UV\parallel BC$.
\vfill
\ex 求所有（非严格）递增的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $f(f(x)+y)=f(f(y)+x)$.
\vfill
\ex 设 $c$ 为正实数，非负整数列 $a_{1},a_{2},\cdots$ 满足以下条件：对任意正整数 $n$，
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]
\item $\dfrac{2^{a_{1}}+2^{a_{2}}+\cdots+2^{a_{n}}}{n}$ 为整数；
\item $2^{a_{n}}\le cn$.
\end{enumerate}
求证：$a_{1},a_{2},\cdots$ 为最终常数数列.
```

```
\vfill
\end{document}
```