# 2021 年北大夏令营试题（文字版）

2021-08-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1374e0254df89960

**试题来源：小猿高中数学竞赛公众号**

## 第一天

1. $a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$k$ 是两两不同的正整数，且不小于 80，求

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-4k^2)k^2$$

的最小值.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，圆 $I$ 为其内切圆，且 $AC>BC>AB$，$D$ 为 $AC$ 中点，$M$ 为圆 $I$ 与 $AC$ 切点，$F$ 在 $AM$ 上，$AE\perp BI$ 于点 $E$，$DJ\parallel AE$ 且 $J$、$E$、$F$ 三点共线，$\{K,D\}=$ 圆$DEF\cap DJ$. 证明：圆 $JFK$ 与圆 $I$ 相切.

3. 给定正整数 $n$，记 $a_i=2i-1$，$(1\le i\le n)$，$b_1$，$b_2$，$\cdots$，$b_n$ 是 2，4，$\cdots$，$2n$ 的排列. 若对 $1\le i\neq j\le n$，均有

$$\min\{a_i,b_i\}+\min\{a_j,b_j\}\neq\min\{a_j,b_i\}+\min\{a_i,b_j\}$$

则称 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为“好排列”，求所有的好排列个数.

1. 是否存在 $f:\mathbb{N}_+\to\mathbb{N}_+$，使得对 $\forall x,y,z\in\mathbb{N}_+$，有

$$z+f(x)+f(f(y))\mid x^2+[f(f(z))]^2+f(y)^2.$$

## 第二天

1. 设 $m$，$n$ 为正整数，有 $mn$ 根长度为 1 的火柴和一个 $m\times n$ 矩形点阵，矩阵中同行、同列相邻两点的距离也等于 1. 某同学将 $mn$ 根火柴互不重叠地放在点阵中，使得所有火柴头恰一一地覆盖了这 $mn$ 个点，火柴尾在与火柴头相邻的点上.
称两根火柴是**连接的**，如果存在一个以这两根火柴为首尾的序列，序列中相邻两根火柴都有公共交点. 称若干根火柴是一个**图形**，如果图形内的火柴两两连接，图形外的任意一根火柴都不与图形内的火柴连接.
试问：该同学至多能摆出多少个图形?

2. 试求所有正整数 $m \leq 2021$，使得存在正实数 $t$，满足对任意正整数 $n$，都有

$$[t[tn]] \equiv m(\mathrm{mod}\ 2021)$$

成立.

3. 设 $z_1$，$z_2$，$\cdots$，$z_{2021}$ 都是单位根，且 $\omega = z_1 + z_2 + \cdots + z_{2021}$ 的模长等于 1. 证明：$\omega$ 也是单位根.

4. 给定正整数 $r \leq n-2$. 设 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_m$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $m$ 个不同的 $r$ 元自己，满足对任意三个不同的 $A_i$，$A_j$，$A_k$，都有 $|A_i \cup A_j \cup A_k| \geq r+2$. 证明：

$$m \leq \frac{n}{r^2} C_n^{r-1}.$$