2024 年西蒙·马雷斯数学竞赛

2024-10-14 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_138f739912bfd194

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2024 年西蒙·马雷斯数学竞赛

2024 Simon Marais Mathematics Competition

程国根 译

A 1. 实数 a,b,c 均大于 1，且满足

$$\lfloor a\rfloor b=\lfloor b\rfloor c=\lfloor c\rfloor a.$$

求证：$a=b=c$.

A 2. 对正整数 n，如果能将集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 划分为互不相交的二元子集，使得每个子集中的两个元素之和为 3 的幂，则称 n 是“3-可分”的．例如：6 是 3-可分的，因为 $\{1,2,3,4,5,6\}=\{1,2\}\cup\{3,6\}\cup\{4,5\}$，且 $1+2=3^1$，$3+6=3^2$，$4+5=3^2$ 均为 3 的幂．
在不超过 2024 的正整数中，有多少个是 3-可分的?

A 3. 设 W 为给定的正整数．S 为所有满足 $a\neq b$ 的正整数对 (a,b) 组成的集合．对任意 $(a,b)\in S$，记 $m(a,b)$ 为对任意正整数 n，都有 $m(a,b)\leq\dfrac{1+na}{1+nb}$ 的最大整数．

(a) 对任意 $(a,b)\in S$，求证：存在正整数 k，使得对任意 $n\geq k$，都有 $m(a,b)\leq\dfrac{1+na}{W+nb}$.

(b) 对任意 $(a,b)\in S$，设 $k(a,b)$ 为满足 (a) 中结论的 k 的最小值．求 $\max\{k(a,b)\mid(a,b)\in S\}$ 或证明其不存在．

A 4. 定义数列：$s_0=1$，对任意 $d\geq1$，$s_d=s_{d-1}+X_d$，其中 X_d 等概率选取自集合 $\{1,2,\cdots,d\}$．求数列 $s_0,s_1,s_2,\cdots$ 中出现无穷多个素数的概率．

1

B 1. Alice 有六个盒子，依次编号为 1 到 6．她偷偷地选择了其中的两个盒子，并在其中各放入一枚硬币．Bob 试图猜出哪两个盒子里有硬币．每次 Bob 猜测时，他都会选取其中的两个盒子．然后，Alice 会告诉 Bob 他所选取的两个盒子里共有多少枚硬币．当 Alice 回答数字 2 时，Bob 成功地找到了两枚硬币．
求最小的正整数 n，使得 Bob 至多猜 n 次就能找到两枚硬币．

B 2. 求所有连续函数 $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$，使得对 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$，都有 $f(x)=(x+1)f(x^2)$．

B 3. 设 $\mathcal{L}$ 为平面内所有直线的集合，$\mathcal{P}$ 为平面内所有点的集合．判断是否存在函数 $g:\mathcal{L}\to\mathcal{P}$，使得对于 $\mathcal{L}$ 中任意两条相交直线 ℓ_1,ℓ_2，都有 $g(\ell_1)\neq g(\ell_2)$，且若 ℓ_3 过点 $g(\ell_1)$ 和 $g(\ell_2)$，则 $g(\ell_3)$ 为 ℓ_1 和 ℓ_2 的交点．

B 4 (此问题为 open，因为目前还不知道 (b) 的答案). 设 n 为正奇数，定义 $f_n(x,y,z)=x^n+y^n+z^n+(x+y+z)^n$．

(a) 求证：存在无穷多个正奇数 n，使得存在模 2 不为常数的 $g_n(x,y,z)$ 和 $h_n(x,y,z)$，满足

$$f_n(x,y,z)\equiv(x+y)(y+z)(z+x)g_n(x,y,z)h_n(x,y,z)\pmod 2.$$

(b) 求所有正奇数 n，使得存在模 2 不为常数的 $g_n(x,y,z)$ 和 $h_n(x,y,z)$ 满足

$$f_n(x,y,z)\equiv(x+y)(y+z)(z+x)g_n(x,y,z)h_n(x,y,z)\pmod 2.$$

（注：两个多项式模 2 同余是指它们之差的展开式中，每一项系数均为偶数；一个多项式模 2 为常数是指它与一个常数多项式之差的展开式中，每一项系数均为偶数。）