2022 年中美洲及加勒比数学奥林匹克

2022-12-02 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_144724c1a62e43f8

第一天

有一个有 2022 块石头的石堆. Ana 和 Beto 轮流玩以下游戏，从安娜开始：在每一回合，如果石堆里有 n 块石头，玩家可以移除 $S(n)$ 块石头或 $n-S(n)$ 块石头，其中 $S(n)$ 为 n 在十进制下的数码和. 移除最后一块石头的人获胜. 确定两位玩家中哪一位有获胜的策略并加以描述.

Ana，Beto，Carlos，Diana，Elena 和 Fabian 在一个圆周上顺次排列，每人都有一张纸，上面分别写着实数 a，b，c，d，e，f.
在每分钟结束时，每个人将自己纸上的数字替换成这分钟开始时其与两个邻居纸上的三个数字之和. 在 2022 分钟结束时，数字 2022 曾出现过，且每个人的纸上仍是初始时的数字. 求 $abc+def$ 的所有可能值.
注：如果在第 N 分钟开始时，Ana，Beto，Carlos 的纸上依次写有数字 x，y，z，则在第 N 分钟结束时，Beto 的纸上写有 $x+y+z$.

设锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O，垂心为 H. AO 和 BH 交于点 D. 点 P 在直线 AB 上，且满足 $PH=PD$. 求证：B，D，O，P 四点共圆.

第二天

1. 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为矩形，S_1，S_2，S_3，S_4 为矩形内部的四个圆，满足 S_k 和 S_{k+1} 相切，并且都和 A_kA_{k+1} 相切，$k=1,2,3,4$，$A_5=A_1$，$S_5=S_1$. 求证：$A_1A_2A_3A_4$ 为正方形.

2. 炼金术士 Esteban 有 8088 块铜片，6066 块青铜片，4044 块银片和 2022 块金片. 他可以取两块不同的金属，用魔法锤把它们变成两块不同的金属，且与他所拿的金属又是不同的. 求 Esteban 在使用魔锤有限次后所能得到的金块的最大数量.
   注：如果 Esteban 拿了一块铜片和一块青铜片，就能把它们变成一块银片和一块金片.

3. 称正整数 n 为“倒装“的，如果存在 n 个整数（可以相同），使得这 n 个整数的和与积都等于 n. 在不超过 2022 的所有正整数中，有多少个是“倒装”的?