2021 年普林斯顿数学竞赛代数组

2022-04-10 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_146ae744a9b467a5

A 组

1. 求所有满足以下方程的实数 x 之和：

$$\frac{8^x - 19 \cdot 4^x}{16 - 25 \cdot 2^x} = 2.$$

2. 对双射函数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，如果函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足等式：$(f \circ g)(x) = g^{-1}(x)$，其中 g^{-1} 为 g 的反函数，则称 f 是“超级可逆的”. 已知 $g(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 81$，且 f 是“超级可逆的”，求 $|f(-289)|$.

3. 设 $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$，$\zeta = e^{2\pi i/5} = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$. 求下式的值：

$$f(\zeta)f(\zeta^2)f(\zeta^3)f(\zeta^4).$$

4. 一元三次多项式 p 的三个正根成等比数列，且和为 10. 设 $|p(-1)|$ 的最大值能写成 $\dfrac{m}{n}$ 的形式，其中 m，n 为互质的正整数. 求 $m + n$.

5. 考虑和式

$$S = \sum_{j=1}^{2021} |\sin\frac{2\pi j}{2021}|.$$

设 S 的值能写成 $\tan\dfrac{c\pi}{d}$ 的形式，其中 c，d 为互质的正整数，且 $2c < d$. 求 $c + d$.

1. f 为多项式，若存在多项式 $h(x)$ 满足 $f(x) - f(p) = h(x)(x - p)^2$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，则称复数 p 是 f 的一个“二次吸引子”. 考虑多项式

$$f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 540x^2 - 2160x + 1,$$

其所有“二次吸引子”为 a_1，a_2，$\cdots$，a_n. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$ 能写成 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的形式，其中 a，b 为正整数. 求 $a + b$.

2. 考虑以下表达式：

$$S = \log_2\left(\left|\sum_{k=1}^{2019}\sum_{j=2}^{2020} \log_{2^{1/k}}(j)\log_{j^2}(\sin\frac{\pi k}{2020})\right|\right).$$

求不小于 S 的最小整数 n.（即求 $\lceil S \rceil$）

1. 斐波那契数列 F_0，F_1，F_2，$\cdots$ 定义如下：$F_0 = F_1 = 1$，对任意 $n \geq 1$，$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. 数列 x_0，x_1，x_2，$\cdots$ 定义如下：$x_0 = 1$，对任意 $k \geq 0$，$x_{k+1} = x_k^2 + F_k^2$. 数列 y_0，y_1，y_2，$\cdots$ 定义如下：$y_0 = 1$，对任意 $k \geq 0$，$y_{k+1} = 2x_k y_k - y_k^2$. 设

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{y_k} = \frac{a - \sqrt{b}}{c},$$

其中 a，b，c 均为正整数，且\gcd(a,c)=1. 求a+b+c$.

B 组

1. 相异正实数 x，y 满足

$$\frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}} = \frac{x}{\sqrt{y^3}}.$$

设 $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a + \sqrt{b}}{c}$，其中其中 a，b，c 均为正整数，且 $\gcd(a, c) = 1$. 求 $a + b + c$.

2. Kris 被要求计算 $\log_{10}(x^y)$，其中 y 为正整数，x 为正实数. 然而，他误读为了 $(\log_{10})^y$ 并进行了计算，却仍然得到了正确的结果. 已知 $x > 10^{1.5}$，求 y 的最大可能值.

3. 同 A 组第 1 题

4. 同 A 组第 2 题

5. 同 A 组第 3 题

6. 同 A 组第 4 题

7. 同 A 组第 5 题

8. 同 A 组第 6 题