2021 年 CMO 复数题一种自然的做法

2024-04-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1477b16a8f446698

前两天有学生问到 2021 年 CMO 第一天第 2 题是怎么猜到答案的，这里写一个我的分析过程。

题目：

求最大的实数 λ，使得对任意正实数 p,q,r,s，都存在复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbb{R})$，满足 $|b|\geq\lambda|a|$，且

$$(pz^3+2qz^2+2rz+s)(qz^3+2pz^2+2sz+r)=0.$$

解答（PDF 中已展开）

分析与解答：

首先理解题意，就是要在 $pz^3+2qz^2+2rz+s=0$ 和 $qz^3+2pz^2+2sz+r=0$ 这两个方程的共 6 个复根中，保证能找到一个 $z=a+b\mathrm{i}$，满足 $|b|\geq\lambda|a|$，即虚部的绝对值较大.

这提示我们去找方程的虚根（实根的 $b=0$，λ 只能为 0 了）.

所以首先要做的是证明这两个方程中至少一个有虚根，我们知道，实系数的三次方程至少有一个实根，一定能分解为一次因式和二次因式之积，对二次因式，考虑其判别式即可.

我们先考虑方程 $pz^3+2qz^2+2rz+s=0$. 设其能分解为

$$p(z+u)(z^2+zx+w)=0$$

的形式，展开后对比系数可得：

$$\begin{cases}u+v=\dfrac{2q}{p}\\ uv+w=\dfrac{2r}{p}\\ uw=\dfrac{s}{p}\end{cases}$$

我们希望二次因式 z^2+vz+w 的判别式 $v^2-4w<0$，于是先消去 u，将（1）（3）两式分别代入（2）可得：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{2q}{p}-v\right)v+w=\dfrac{2r}{p}\\ \dfrac{s}{pw}\cdot v+w=\dfrac{2r}{p}\end{cases}$$

第一个式子中有一个类似于判别式的式子 v^2-w：

$$v^2-w=\frac{2qv-2r}{p}$$

若能证明 $v^2-w\le 0$，结合 $w>0$ 可知 $v^2-4w<0$，所以我们选择证明更强的结论：$v^2-w\le 0$（否则，v^2-4w 的形式复杂得多）.

这需要将第二个式子中的 w 消去，只保留 v，观察式子结构容易想到用均值不等式：

$$\frac{2r}{p}=\frac{sv}{pw}+w\ge 2\sqrt{\frac{sv}{pw}\cdot w}=2\sqrt{\frac{sv}{p}}$$

即 $v\le\dfrac{r^2}{ps}$.

于是

$$v^2-w=\frac{2qv-2r}{p}\le\frac{2q\cdot\dfrac{r^2}{ps}-2r}{p}=\frac{2r(qr-ps)}{p^2s}$$

因此，为使得方程 $pz^3+2qz^2+2rz+s=0$ 有虚根，只需 $qr-ps\le 0$.

同理，为使得方程 $qz^3+2pz^2+2sz+r=0$ 有虚根，只需 $ps-qr\le 0$.

这两种情况必有一种发生，不妨设 $qr-ps\le 0$，则二次方程 $z^2+vz+w=0$ 有两个虚根 $a\pm b\mathrm{i}$.

此时由韦达定理：

$$\begin{cases}2a=(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})=-v\\ a^2+b^2=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=w\end{cases}$$

代入上面证明的不等式 $v^2-w\le 0$ 可得：

$$(-2a)^2-(a^2+b^2)\le 0$$

即 $|b|\ge\sqrt{3}|a|$.

因此，我们证明了 $\lambda=\sqrt{3}$ 是满足题意的.

接下来证明：λ 的最大值为 $\sqrt{3}$，只需要代一组恰好取等的 p,q,r,s 即可.

由上面的证明过程可以发现，只需 $ps=qr$. 更特殊地，可令 $p=q=r=s=1$. 此时方程变为：

$$\begin{aligned}&(z^3+2z^2+2z+1)^2=0\\ \Longleftrightarrow\ &(z+1)^2(z^2+z+1)^2=0\end{aligned}$$

其六个根分别为两组

$$-1,\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

由 $|b|\ge\lambda|a|$ 知：$\lambda\le\sqrt{3}$.

综上，λ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

注：

本方法没有像大多数方法一样，一来就令 $p=q=r=s=1$，让人摸不着头脑. 而是从寻找虚根出发，研究 p,q,r,s 需要满足的条件，相对更自然一些.