2022 年高联 A2 卷一试非官方解答

2022-11-27　原文链接

网站版本 21bf3079f0b5 · 文章 ID h_14f850c1dfba4d71

今天看到题目之后就马上给学生讲了一试，这里对上课的解答做个整理.

1. 函数 $f(x)=\sin 2022x+|x-11|+|x-27|$ 的最小值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： 15

解析：

分成两部分：

$\sin 2022x$ 的最小值为 -1，在 $2022x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$ 时取等.

由几何意义，$|x-11|+|x-27|$ 的最小值为 16，在 $11\leq x\leq 27$ 时取等.

两个最小值能同时取得，故本题答案为 $-1+16=15$.

1. 若正数 a,b 满足 $\log_2 a+\log_4 b=8$,$\log_4 a+\log_8 b=2$，则 $\log_8 a+\log_2 b$ 的值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $-\dfrac{52}{3}$

解析：

将底数全换为 2，解出 $\log_2 a$ 和 $\log_2 b$ 即可.

$$\begin{cases}\log_2 a+\dfrac{1}{2}\log_2 b=8\\ \dfrac{1}{2}\log_2 a+\dfrac{1}{3}\log_2 b=2\end{cases}$$

于是 $\log_2 a=20$，$\log_2 b=-24$，$\log_8 a+\log_2 b=\dfrac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b=\dfrac{20}{3}-24=-\dfrac{52}{3}$.

1. 若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项和为 1，各项的绝对值之和为 2，则首项 a_1 的值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\dfrac{4}{3}$

解析：

无穷等比数列求和公式：$S=\dfrac{a_1}{1-q}$，$|q|<1$.

由题意知，$\{a_n\}$ 正负交错，故 $q\in(-1,0)$.

而各项和 $S_1=1>0$，故 $a_1>0$.

因此 $\{a_n\}$ 奇数项为正，偶数项为负，各项绝对值组成一个公比为 $-q$ 的等比数列.

各项和 $S_1=\dfrac{a_1}{1-q}=1$，即 $a_1=1-q$.

各项的绝对值之和 $S_2=\dfrac{a_1}{1+q}=2$，即 $a_1=2+2q$.

解得 $a_1=\dfrac{4}{3}$.

1. 设 a 为实数. 若存在实数 t，使得 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{t-\mathrm{i}}+\mathrm{i}$ 为实数（i 为虚数单位），则 a 的取值范围是 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right]$

解析：

$$\begin{aligned}&\frac{a-\mathrm{i}}{t-\mathrm{i}}+\mathrm{i}\\=&\frac{(a-\mathrm{i})(t+\mathrm{i})}{(t-\mathrm{i})(t+\mathrm{i})}+\mathrm{i}\\=&\frac{(at+1)+(a-t)\mathrm{i}+(t^2+1)\mathrm{i}}{t^2+1}\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

即存在 $t\in\mathbb{R}$，使得 $t^2-t+a+1=0$.

因此 $\Delta=(-1)^2-4(a+1)=-4a-3\geq 0$，即 $a\leq-\dfrac{3}{4}$.

1. 在平面直角坐标系中，F_1,F_2 分别为双曲线 Ω：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左，右焦点，过 F_1 的直线 l 交 Ω 于两点 P，Q. 若 $\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{F_1P}=16$，则 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}$ 的值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\dfrac{27}{13}$

解析：

$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$. 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

则 $\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{F_1P}=(4,0)\cdot(x_1+2,y_1)=4(x_1+2)=16$

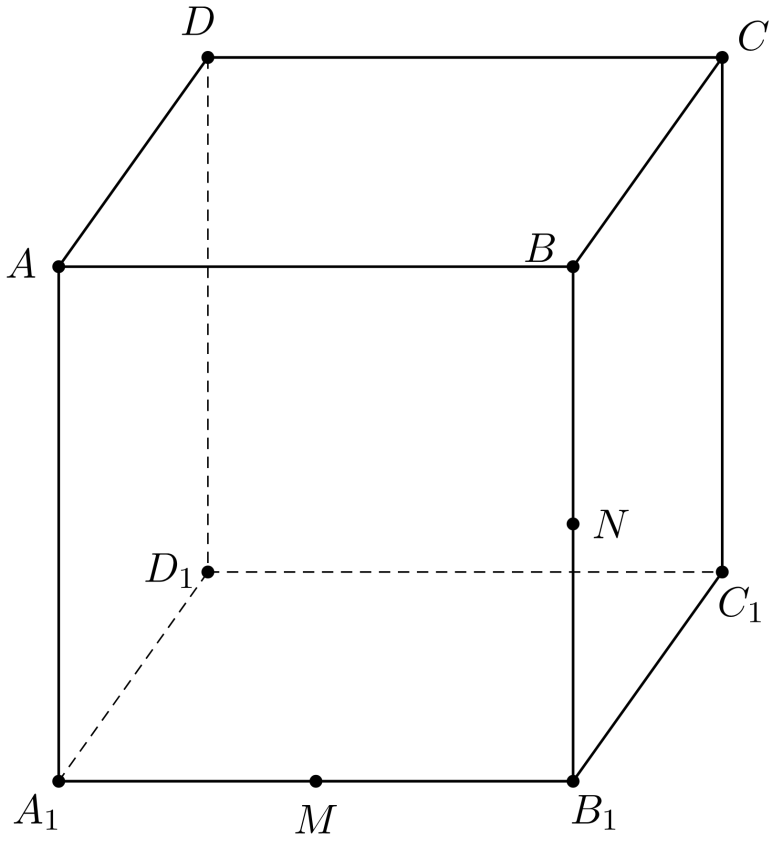
即 $x_1=2$，代入双曲线方程得 $P(2,\pm3)$. 由对称性不妨设 $P(2,3)$，于是 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{4}(x+2)$.

和 $3x^2-y^2=3$ 联立得：$3x^2-\dfrac{9}{16}(x+2)^2=3$，即 $13x^2-12x-28=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-\dfrac{14}{13}$，

于是 $Q\left(-\dfrac{14}{13},\dfrac{9}{13}\right)$.

于是 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=y_1y_2=\dfrac{27}{13}$.

1. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为棱 A_1B_1,BB_1 的中点，过 D,M,N 三点作该正方体的截面，已知截面是一个多边形 Γ，则 Γ 在顶点 D 处的内角的余弦值为 _____.

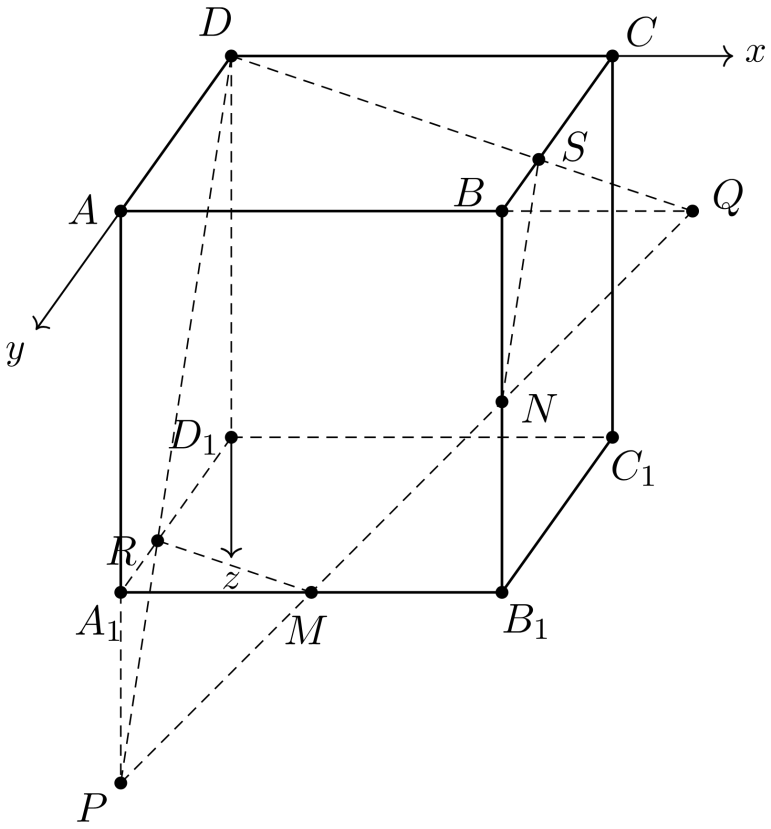


解答（PDF 中已展开）

答案： $\dfrac{4}{13}$

解析：

容易找到 Γ 和正方体棱的另两个交点.



如图，设 $MN\cap AA_1=P$，$MN\cap AB=Q$，

$DP\cap A_1D_1=R$，$DQ\cap BC=S$．易知 R 为 A_1D_1 靠近 A_1 的三等分点，S 为 BC 靠近 B 的三等分点．截面 Γ 为五边形 $DRMNS$.

设正方体边长为 $3a$，以 D 为原点，如图所示建立空间直角坐标系．则 $\overrightarrow{DR}=(0,2a,3a)$，$\overrightarrow{DS}=(3a,2a,0)$.

于是 $|\overrightarrow{DR}|=|\overrightarrow{DS}|=\sqrt{13}a$，$\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{DS}=4a^2$.

$\cos<\overrightarrow{DR},\overrightarrow{DS}>=\dfrac{4a^2}{\sqrt{13}a\cdot\sqrt{13}a}=\dfrac{4}{13}$.

1. 在 $1,2,\cdots,10$ 中随机选出三个不同的数，它们两两互素的概率为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\dfrac{7}{20}$

解析：

考虑 6 和 10 这两个有不同素因子的数，易知不能同时选 6 和 10.

(1) 选 6．则不能再选 2 的倍数和 3 的倍数，只剩下 1,5,7．共有 $\mathrm{C}_3^2=3$ 种选法.

(2) 选 10. 则不能再选 2 的倍数和 5 的倍数, 只剩下 1,3,7,9, 且 3 和 9 不能同时选. 共有 $\mathrm{C}_4^2-1=5$ 种选法.

(3)6 和 10 都不选．将剩余的数划分为 $\{1\}$，$\{2,4,8\}$，$\{3,9\}$，$\{5\}$，$\{7\}$ 这五个集合，从三个不同

的集合各选出 1 个数，考虑 $f(x)=(1+x)^3(1+2x)(1+3x)$ 的三次项系数即可，共有 34 种选法. 于是 $p=\dfrac{3+5+34}{\mathrm{C}_{10}^3}=\dfrac{7}{20}$.

1. 设 k,l,m 为实数，$m\neq 0$，在平面直角坐标系中，函数 $y=f(x)=k+\dfrac{m}{x-l}$ 的图像为曲线 C_1，另一函数 $y=g(x)$ 的图像为曲线 C_2，且满足 C_2 与 C_1 关于直线 $y=x$ 对称. 若点 $(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$ 都在曲线 C_1 或 C_2 上，则 $f(k+l+m)$ 的值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： 1 或 $-\dfrac{4}{5}$

解析：

$f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数，$f(x)=k+\dfrac{m}{x-l}$，故 $g(x)=l+\dfrac{m}{x-k}$. $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为双射函数. 分两种情况讨论：

(1)$(1,4)\in C_1$，$(2,4)\in C_2$，即 $(4,2)\in C_1$，于是 $(3,2)\notin C_1$，故 $(3,2)\in C_2$，$(2,3)\in C_1$. 于是

$$\begin{cases}(1-l)(4-k)=m\\(4-l)(2-k)=m\\(2-l)(3-k)=m\end{cases}$$

两两作差得：

$$\begin{cases}3k=2l+4\\2k=l+2\end{cases}$$

于是 $k=0$，$l=-2$，$m=12$. $f(x)=\dfrac{12}{x+2}$. $f(k+l+m)=\dfrac{12}{0-2+12+2}=1$.

(2) 和 (1) 中相反，注意到 l 和 k 的对称性，此时有 $k=-2$，$l=0$，$m=12$. $f(x)=-2+\dfrac{12}{x}$. $f(k+l+m)=-2+\dfrac{12}{-2+0+12}=-\dfrac{4}{5}$.

1. 已知 $\triangle ABC$ 及其边 BC 上的一点 D 满足 $AB=2BD$，$AC=3CD$，且以 A,D 为焦点可以作一个椭圆 Γ 同时经过 B,C 两点，求 Γ 的离心率.

解答（PDF 中已展开）

解析：

设 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，则 $BD=\dfrac{1}{2}c$，$CD=\dfrac{1}{3}b$，因此 $a=\dfrac{1}{3}b+\dfrac{1}{2}c$.

由题意知：$AB+BD=AC+CD$，即 $\dfrac{3}{2}c=\dfrac{4}{3}b$，即 $9c=8b$.

设 $c=8k$，则 $b=9k$，$a=\dfrac{1}{3}b+\dfrac{1}{2}c=7k$. $BD=4k$，$CD=3k$.

椭圆的长轴长 $=AB+BD=\dfrac{3}{2}c=12k$.

由斯特瓦尔特定理：

$$\begin{aligned}AD^2&=AB^2\cdot\frac{CD}{BC}+AC^2\cdot\frac{BD}{BC}-BD\cdot CD\\&=(8k)^2\cdot\frac{3k}{7k}+(9k)^2\cdot\frac{4k}{7k}-(3k)\cdot(4k)\\&=\frac{432}{7}k^2\end{aligned}$$

即焦距 $AD=\dfrac{12\sqrt{21}}{7}k$.

因此离心率 $e=\dfrac{\frac{12\sqrt{21}}{7}k}{12k}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非负实数，且满足：对任意整数 $n\geq 2$，均有 $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+n$. 若 $a_2a_{2022}=1$，求 a_1 的最大可能值.

解答（PDF 中已展开）

解析：

设 $b_n=a_n-n$，由题意知：

$a_{n+1}-(n+1)=(a_n-n)-(a_{n-1}-(n-1))$，即 $b_{n+1}=b_n-b_{n-1}$.

设 $b_1=p$，$b_2=q$，则 $b_3=q-p$，$b_4=-p$，$b_5=-q$，$b_6=p-q$，之后以 6 为周期循环出现.

于是 $a_2a_{2022}=(b_2+2)(b_{2022}+2022)=(q+2)(p-q+2022)=1$

由题意知，$b_n+n\geq 0$ 对 $n\in\mathbb{Z}_+$ 恒成立. 只需考虑 $1\leq n\leq 6$ 的情形.

有 $p+1\geq 0$，$q+2\geq 0$，$q-p+3\geq 0$，$-p+4\geq 0$，$-q+5\geq 0$，$p-q+6\geq 0$，即

$$\begin{cases}-1\leq p\leq 4\\-2\leq q\leq 5\\-3\leq q-p\leq 6\end{cases}$$

由 $-3\leq q-p\leq 6$ 知 $2016\leq p-q+2022\leq 2025$，于是 $q+2=\dfrac{1}{p-q+2022}\in\left[\dfrac{1}{2025},\dfrac{1}{2016}\right]$.

因此

$$\begin{aligned}a_1=p+1&=\frac{1}{q+2}+q-2021\\&=\frac{1}{q+2}+q+2-2023\\&\leq\frac{1}{\frac{1}{2025}}+\frac{1}{2025}-2023\\&=\frac{4051}{2025}\end{aligned}$$

当且仅当 $q+2=\dfrac{1}{2025}$，$p-q=3$ 时，等号成立.

故 a_1 的最大可能值为 $\dfrac{4051}{2025}$.

1. 给定整数 n（$n\geq 2$）. 对于一个 $2n$ 元有序数组

$$T=(a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n),$$

若 T 的每个分量均为 0 或 1，且对任意 p,q $(1\leq p<q\leq n)$，均有 $(a_p,b_p,b_q)\neq(1,0,1)$，且 $(a_q,b_q,a_p)\neq(1,0,0)$，则称 T 为“有趣数组”. 求有趣数组的个数.

码到这题的时候看了眼群，发现官方答案出来了，和我的做法基本一样，但我写得太**啰**嗦了. 就采用了官方答案的处理方法，把 $(1,0)$、$(0,1)$、$(1,1)$、$(0,0)$ 视为四个字母 A、B、C、D. 这里贴一下官方答案：

解：考虑任意一个有趣数组 $T=(a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n)$，对 $i=1,2,\cdots,n$，将 (a_i,b_i) 视为一个字母，其中 $(1,0),(0,1),(1,1),(0,0)$ 分别视为字母 A,B,C,D，则 T 可视为一个由 A,B,C,D 构成的长度为 n 的字符串 $s(T)$. 有趣数组 T 的性质可等价地描述为：当字符串 $s(T)$ 含字母 A 时，A 之后不出现字母 B,C，且 A 之前不出现字母 B,D. 显然 $s(T)$ 不同时含有字母 A 与 B.

若 $s(T)$ 不含字母 A，则这样的字符串均满足条件，共 3^n 个. ……5 分

若 $s(T)$ 含有字母 A，则 $s(T)$ 必是形如 $CC\cdots CAA\cdots ADD\cdots D$ 的字符串（允许没有字母 C 或 D），且这样的字符串均满足条件. ……10 分

设 $s(T)$ 中第一个 A 与最后一个 A 分别出现在第 x 个位置与第 y 个位置，则 $s(T)$ 由数组 (x,y)（其中 $1\leq x\leq y\leq n$）唯一确定.

因 (x,y) 的取法有 $n+C_n^2=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 种，故这样的字符串 $s(T)$ 有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个.

综上，有趣数组所对应的字符串共有 $3^n+\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个. 因此有趣数组的个数为 $3^n+\dfrac{n(n+1)}{2}$. ……20 分