一道预赛不等式题的初等解法

2022-08-31 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_150c58d21b515e4b

已知 $f(x,y)=x^3+y^3+x^2y+xy^2-3(x^2+y^2+xy)+3(x+y)$，且 $x,y\geq\dfrac{1}{2}$，求 $f(x,y)$ 的最小值.

（2011 年河北省预赛）

这道预赛题的背景比较明显，乘上 $x-y$ 后可以将等式右侧的 x 和 y 进行分离. 于是在 $x\neq y$ 时，$f(x,y)$ 可以看作某个函数的割线斜率，再由拉格朗日中值定理即可转为切线斜率.

这也是官方的解答，如下：

当 $x\neq y$ 时，题设函数两边同乘以 $x-y$ 得

$$\begin{aligned}&(x-y)f(x,y)\\=&(x^4-y^4)-3(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)\end{aligned}$$

令 $g(x)=x^4-3x^3+3x^2$.

则 $f(x,y)=\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}$ 为 $g(x)$ 图像上两点的斜率.

当 $x=y$ 时，$f(x,y)=4x^3-9x^2+6x$.

于是，只需求 $g(x)$ 在 $x\geq\dfrac{1}{2}$ 上的导函数 $h(x)=4x^3-9x^2+6x$ 的最小值.

易求当 $x\geq\dfrac{1}{2}$ 时，$h(x)=4x^3-9x^2+6x$ 的最小值为 1.

来源：《中等数学》2012 年第 7 期

本方法最大的问题就在拉格朗日中值定理的使用。在高中范围内，我是非常反对直接使用这些高级定理解题的。

而今天，我又听到一个学生说，某老师讲这题用了偏导数，这就更加不可理解了。

这里写一个初等的解法.

首先猜测等号成立条件，由对称性可知 $f(x,y)$ 在 $x=y$ 时取得极值. 此时 $f(x,y)=4x^3-9x^2+6x\triangleq g(x)$，则 $g'(x)=12x^2-18x+6=6(2x-1)(x-1)$，于是 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增. 所以猜测 $f(x,y)$ 在 $x=y=1$ 时取得最小值.（这里可以多尝试几组 (x,y)，确保结论准确）

根据猜测的取等条件进行恒等变形.

$$\begin{aligned}&f(x,y)-1\\=&x^3+y^3+x^2y+xy^2-3(x^2+y^2+xy)+3(x+y)-1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-1)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)(y-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2+(x-1)(y-1)\\
&=(x+y-1)\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]+(x-1)(y-1)\\
&\geq(x+y-1)\cdot 2|(x-1)(y-1)|+(x-1)(y-1)
\end{aligned}
$$

若 x，y 同不大于 1，或同不小于 1，则

$$(x+y-1)\cdot 2|(x-1)(y-1)|+(x-1)(y-1)\geq 0$$

即 $f(x,y)\geq 1$，在 $x=y=1$ 时等号成立.

否则，不妨设 $\frac{1}{2}\leq x<1<y$，则 $x+y\geq\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$，即 $2x+2y-3>0$.

$$
\begin{aligned}
&(x+y-1)\cdot 2|(x-1)(y-1)|+(x-1)(y-1)\\
=&(1-x)(y-1)(2(x+y-1)-1)\\
=&(1-x)(y-1)(2x+2y-3)\\
>&0
\end{aligned}
$$

综上，$f(x,y)$ 最小值为 1.