简证第十届爱尖子杯二试的三元不等式

2025-05-25　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_15242b7413e948af

求所有的实数 t，使得对任意正实数 a,b,c，都有

$2+t(a+b+c)+abc\geq(t+1)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$.

解答（PDF 中已展开）

解答：

令 $a=b=x$，$c=\dfrac{1}{x^3}$，得

$$\begin{aligned}&2+t(2x+\frac{1}{x^3})+\frac{1}{x}\geq(t+1)(x+\frac{2}{x})\\\iff&t\geq\frac{x+\frac{2}{x}-2-\frac{1}{x}}{2x+\frac{1}{x^3}-x-\frac{2}{x}}=\frac{x^2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$，得 $t\geq1$.

下证：$t\geq1$ 时，不等式成立．注意到不等式关于 t 为一次式，只需证明 $t=1$ 时的情形，即

$2+a+b+c+abc\geq2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

由抽屉原理，a,b,c 三数中，必存在两数在 1 的同侧，不妨设 $(a-1)(b-1)\geq0$，于是 $abc\geq(a+b-1)c$.

$$\begin{aligned}&2+a+b+c+abc\\\geq&2+a+b+c+ac+bc-c\\=&(1+ac)+(1+bc)+(a+b)\\\geq&2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\end{aligned}$$

故满足题意的 t 的取值范围为 $[1,+\infty)$.