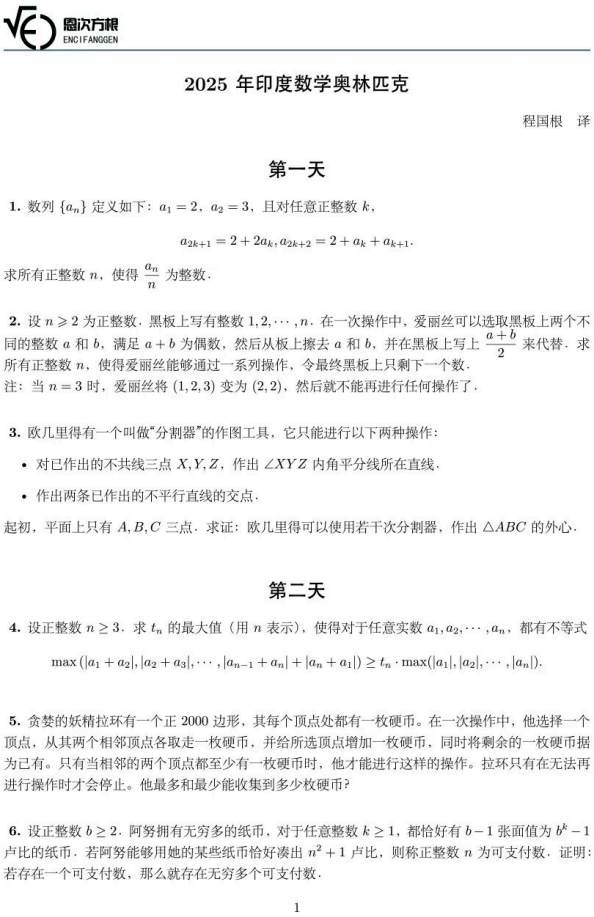
2025 年印度数学奥林匹克

2025-01-20　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1572f40a5feafb81



恩次方根
ENCIFANGGEN

2025 年印度数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=2$，$a_2=3$，且对任意正整数 k，

$$a_{2k+1}=2+2a_k, a_{2k+2}=2+a_k+a_{k+1}.$$

求所有正整数 n，使得 $\frac{a_n}{n}$ 为整数.

2. 设 $n\geqslant 2$ 为正整数. 黑板上写有整数 $1,2,\cdots,n$. 在一次操作中，爱丽丝可以选取黑板上两个不同的整数 a 和 b，满足 $a+b$ 为偶数，然后从板上擦去 a 和 b，并在黑板上写上 $\frac{a+b}{2}$ 来代替. 求所有正整数 n，使得爱丽丝能够通过一系列操作，令最终黑板上只剩下一个数.
注：当 $n=3$ 时，爱丽丝将 $(1,2,3)$ 变为 $(2,2)$，然后就不能再进行任何操作了.

3. 欧几里得有一个叫做"分割器"的作图工具，它只能进行以下两种操作：

- 对已作出的不共线三点 X,Y,Z，作出 $\angle XYZ$ 内角平分线所在直线.
- 作出两条已作出的不平行直线的交点.

起初，平面上只有 A,B,C 三点. 求证：欧几里得可以使用若干次分割器，作出 $\triangle ABC$ 的外心.

第二天

4. 设正整数 $n\geq 3$. 求 t_n 的最大值（用 n 表示），使得对于任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，都有不等式

$$\max(|a_1+a_2|,|a_2+a_3|,\cdots,|a_{n-1}+a_n|+|a_n+a_1|)\geq t_n\cdot\max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|).$$

5. 贪婪的妖精拉环有一个正 2000 边形，其每个顶点处都有一枚硬币。在一次操作中，他选择一个顶点，从其两个相邻顶点各取走一枚硬币，并给所选顶点增加一枚硬币，同时将剩余的一枚硬币据为己有。只有当相邻的两个顶点都至少有一枚硬币时，他才能进行这样的操作。拉环只有在无法再进行操作时才会停止。他最多和最少能收集到多少枚硬币?

6. 设正整数 $b\geq 2$. 阿努拥有无穷多的纸币，对于任意整数 $k\geq 1$，都恰好有 $b-1$ 张面值为 b^k-1 卢比的纸币. 若阿努能够用她的某些纸币恰好凑出 n^2+1 卢比，则称正整数 n 为可支付数. 证明：若存在一个可支付数，那么就存在无穷多个可支付数.

1

每次发赛题翻译的时候，都有读者问到是否有答案，一般点进 "阅读原文 "都能看到 aops 上的解答。另外也有老师建议建一个赛题讨论群，方便各位老师、同学交流，欢迎感兴趣并且能做题的读者加入。(群内讨论的解答可能会整理发出)



群聊: 赛题讨论群

该二维码7天内(1月27日前)有效，重新进入将更新