# 《中等数学增刊》一道代数题另证

2025-07-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_159f9f95662a1d0a

**题目：**

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2025}$ 满足

$\prod_{i=1}^{2025}(a_i+1)=\prod_{i=1}^{2025}(a_i-1)$.

求 $\sum\limits_{i=1}^{2025}|a_i|$ 的最小值.

**解答（PDF 中已展开）**

**解答：**（以下用奇数 $n\geq 3$ 代替 2025）

取 $a_1=1$，$a_2=-1$，$a_3=\cdots=a_n=0$，得 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|=2$，下证：$\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|\geq 2$.

若 $a_i$ 中有 1，则必有 $-1$，不等式成立，下设 $a_i\neq\pm 1$.

记 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，则 $\prod\limits_{i=1}^{n}f(a_i)=1$，且

$$f(x)\in\begin{cases}(1,+\infty), & x>1\\ (-\infty,-1], & 0\leq x<1\\ (-1,0), & -1<x<0\\ (0,1), & x<-1\end{cases}$$

由 $n$ 为奇数，$\prod\limits_{i=1}^{n}f(a_i)>0$ 知，$f(a_i)$ 不全为负，于是存在 $|a_i|>1$，不妨设 $a_1>1$（将全体 $a_i$ 改为 $-a_i$，题目不变）. 若存在 $a_i<-1$，则不等式成立，下设 $a_i>-1$.

由 $\left|\prod\limits_{i=1}^{n}f(a_i)\right|=1$ 知，存在 $|f(a_i)|<1$，不妨设它们为 $a_2,\cdots,a_m\in(-1,0)$. 则必有

$$\begin{aligned}&\left|\prod_{i=1}^{m}f(a_i)\right|=\left|\frac{1}{\prod_{i=m+1}^{n}f(a_i)}\right|\leq 1\\ \Longleftrightarrow\ &\left|\prod_{i=1}^{m}(a_i+1)\right|\leq\left|\prod_{i=1}^{m}(a_i-1)\right|\\ \Longleftrightarrow\ &\prod_{i=1}^{m}(1+a_i)+\prod_{i=1}^{m}(1-a_i)\leq 0\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{a_1-1}{a_1+1}\geq\prod_{i=2}^{m}\frac{1+a_i}{1-a_i}\end{aligned}$$

若 $S=\sum\limits_{i=2}^{m}a_i\leq -1$，则不等式成立，下设 $S\in(-1,0)$. 由 $(1+x)(1+y)(1-x-y)(1-x)(1-y)(1+x+y)=-2xy(x+y)\geq 0$ 知

$\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\geq\frac{1+x+y}{1-x-y}$

于是

$$\frac{a_1-1}{a_1+1} \geq \prod_{i=2}^{m} \frac{1+a_i}{1-a_i} \geq \frac{1+S}{1-S}$$

$$\Longleftrightarrow a_1 \cdot (-S) \geq 1$$

从而

$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \geq a_1 + (-S) \geq 2$

证毕.

（原解答比较繁杂，我的解答也可以写得再简洁一些，这里主要是为了体现解题思路）