我的数论启蒙题

2022-05-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_15d8e9b205745600

小学时候，我总爱摆弄各种数字。有一天，偶然发现 $6^5+1=7777$ 这一神奇结论，不禁想到，还有没有与之类似的式子？很快想到了 $2^5+1=33$ 这个更为简单的式子，但是否还有呢？

这个问题困扰了我接近三年，闲暇时候就会开始思考，期间转过学，遇到过四个不同的数学老师，每次都会去问这道题，但始终没有得到解答。大约六年级时，有了足够的数论基础，我才攻克这一难题底数为偶数的版本（奇数应该还是 open 的）。也是在这过程之中，我对数论产生了深厚的兴趣。

今天在翻译 2022 年法语数学奥林匹克试题时，突然发现最后一题正是当年所想的问题（这里限制了 a 为偶数）. 题目如下：

> 求所有的整数 $a\geq 2$，$b\geq 2$，使得 a 是偶数，且 a^b+1 的所有数码均相等.

具体证明过程已经记不太清了，看了看 AoPS 上的解答，大体上是一致的，于是决定贴上来，对自己数竞生涯的开端做个记录。

首先，设 $a^b+1=\underbrace{\overline{mm\dots m}}_{k\text{ 个 }m}$，其中 m 和 k 均为正整数，且 $m\leq 9$.

分两种情况进行讨论：

$(1)k=1$，易知只有 $(a,b)=(2,2)$ 或 $(2,3)$.

$(2)k\geq 2$，考虑模 4，注意到 $4\mid a^b$，于是

$$\begin{aligned}
&a^b+1\equiv 1 \pmod 4\\
\Longleftrightarrow\ &\underbrace{\overline{mm\dots m}}_{k\text{ 个 }m}\equiv 1 \pmod 4\\
\Longleftrightarrow\ &\overline{mm}\equiv 1 \pmod 4\\
\Longleftrightarrow\ &11m\equiv 1 \pmod 4\\
\Longleftrightarrow\ &m\equiv 3 \pmod 4
\end{aligned}$$

于是 $m=3$ 或 7.

$m=3$ 时，若 $k\geq 3$，考虑模 8，有

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\overline{33\dots 3}}_{k\text{个}3}\equiv 333\equiv 5 \pmod 8\\
\Longleftrightarrow\ &a^b+1\equiv 5 \pmod 8\\
\Longleftrightarrow\ &a^b\equiv 4 \pmod 8
\end{aligned}$$

若 $b \geq 3$，有 $8 \mid a^b$，矛盾，故 $b = 2$. 然而

$$a^2 + 1 \equiv \underbrace{\overline{33\ldots3}}_{k个3} \equiv 0 \pmod 3$$

即 $a^2 \equiv 2 \pmod 3$，矛盾.

于是必有 $k = 2$，故 $(a, b) = (2, 5)$.

$m = 7$ 时，若 $k \geq 5$，考虑模 32，有

$$\begin{aligned} &\underbrace{\overline{77\ldots7}}_{k个7} \equiv 77777 \equiv 17 \pmod{32} \\ \iff &a^b + 1 \equiv 17 \pmod{32} \\ \iff &a^b \equiv 16 \pmod{32} \end{aligned}$$

若 $b \geq 5$，有 $32 \mid a^b$，矛盾，故 $b = 2, 3, 4$. 然而

$$a^2 + 1 \equiv \underbrace{\overline{77\ldots7}}_{k个7} \equiv 0 \pmod 7$$

即 $a^2 \equiv 6 \pmod 7$，矛盾.

$$a^4 + 1 \equiv \underbrace{\overline{77\ldots7}}_{k个7} \equiv 0 \pmod 7$$

即 $a^4 \equiv 6 \pmod 7$，矛盾.

$b = 3$ 时，$a^3 \equiv 16 \pmod{32}$，即 $v_2(a^3) = 4$，矛盾.

于是 $k \leq 4$，枚举可得 $(a, b) = (6, 5)$.

综上，满足题意的 (a, b) 一共有 4 组：$(2, 2)$，$(2, 3)$，$(2, 5)$，$(6, 5)$.