2022 年第 3 届“亚历山大-布拉泽夫斯基-凯恩”纪念赛

2022-01-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_15e01765674a936b

高级组

第一天

1. 给定一个 6×6 的方格，其中每个小方格被染为红、绿二色之一．已知不存在同行、同列、同对角线的连续 4 个同色小方格．如果一个 2×2 的方格恰好有一条红色对角线和一条蓝色对角线，则称它是“像国际象棋”的．求“像国际象棋”的方格个数的最大值．

2. 给定整数 $n\geq 2$，正实数 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，$y_1<y_2<\cdots<y_n$．求证：对任意 $C\in(-2,2)$，有
$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+Cx_iy_i+y_i^2}<\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+Cx_iy_{i+1}+y_{i+1}^2}$$
其中 $y_{n+1}=y_1$．

3. 求所有三元正整数组 (x,y,z)，满足 $x^2+y^2+x+y+z=xyz+1$．

第二天

1. 设锐角 $\triangle ABC$ 的内切圆为 ω，内心为 I，A 所对的旁切圆为 ω_a．ω 和 BC 切于点 X，ω_a 和 BC 切于点 Y．点 Z 为 AY 和 ω 的两个交点中更靠近 A 的一点．点 H 为点 A 在 BC 上的垂足．求证：HZ，IY，AX 三线共点．

2. 如果在正整数 n 的二进制表示的数码中，1 的个数严格大于 0 的个数，则称 n 是“值得纪念的”．（例如，25 是“值得纪念的”，因为 $25=(11001)_2$，其中 1 的个数大于 0 的个数）问：是否有无穷多个“值得纪念的”完全平方数?

3. 对任意整数 $n\geq 1$，考察由同一圆上等距分布的 $2n$ 个点组成的集合 P_{2n}．点集的一个完美匹配由恰以 P_{2n} 中的所有点为端点的 n 条线段组成．记 $\mathcal{M}_n$ 为 P_{2n} 的所有非交叉的完美匹配（即线段不相交）组成的集合．如果完美匹配 $M\in\mathcal{M}_n$ 关于圆心中心对称后和自身重合，则称 M 为中心对称的．用 n 表示 $\mathcal{M}_n$ 中中心对称的完美匹配的个数．

初级组

第一天

1. AD 为锐角 $\triangle ABC$ 的一条高（$D\in BC$）．过 C 作 AB 的平行线和 AD 的垂直平分线交于点 G．求证：$AC=BC$ 当且仅当 $\angle AGC=90^\circ$．

2. 同高级组第 1 题

3. 同高级组第 2 题

第二天

1. 求所有正整数 n，使得集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2n\}$ 能被划分为两个不相交的 n 元子集 S_1 和 S_2，使得 S_1 中所有元素之和能被 S_2 中所有元素之和整除.

2. 同高级组第 4 题

3. 同高级组第 5 题